O-11

スピンをもつ無質量粒子の正準形式

Canonical formalism of massless spinning particles

○根岸翔馬[1]，鈴木隆史[1]，出口真一[2]
*Shoma Negishi[1], Takafumi Suzuki[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We study a canonical formalism of massless spinning particles written in terms of commuting spinor variables. Canonical quantization of this system is carried out on the basis of the Dirac quantization procedure.

1．導入

これまでに，スピンをもつ粒子の古典力学的な記述とその量子化について，様々な研究がなされてきた．例えば，反可換数を用いた模型としては spinning particle や super particle がある．一方で，可換なスピナー変数を用いた模型としては剛体模型がある [1]．これは，質量をもった粒子に対する模型であるが，本研究では可換なスピナー変数を用いて，スピンをもつ無質量粒子を考察する [2]．

我々は相対論的自由粒子の Lagrangian を出発点にして，スピナー表現でのスピンをもつ無質量粒子の Lagrangian を与える．この Lagrangian を基に Dirac の手法に従い，正準形式を構成する．このとき第一次拘束条件と第二次拘束条件が得られる．これらを第一類と第二類に分類した後，第二類拘束条件に関しては，Dirac 括弧を定義し，正準変数を減らすことで処理する．第一類拘束条件に関しては，Dirac 括弧を基に量子化した後，物理的状態を定義する条件として読み換える．これを波動方程式として表現し，それを解くことで，スピンをもつ自由粒子の平面波解を導く．このとき，ヘリシティ（スピン）は量子化されて $\hbar/2$ を基本単位とし離散的な値をとることがわかる．

次に，上述の無質量粒子が電磁場と相互作用する場合を考え，これに対する正準形式を構成し量子化を行う．

2．無質量粒子のスピナー表現

4 次元時空における相対論的粒子の軌道を固有時間 τ の関数として $x^\mu(\tau)$ $(\mu=0,1,2,3)$ と表す．質量 m の相対論的自由粒子の Lagrangian は $L_{p1}=-mc\sqrt{\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu}$ $(\dot{x}^\mu:=\frac{dx^\mu}{d\tau})$ であることが知られている．しかし，この Lagrangian は無質量粒子 $(m=0)$ には適応できない．そこで，補助変数 $e(\tau)$ と $p_\mu(\tau)$ を導入し，L_{p1} を次のように書き換える：

$$L_{p2}=-p_\mu\dot{x}^\mu+\frac{1}{2}e\left(p_\mu p^\mu-(mc)^2\right) \ . \tag{1}$$

本研究では無質量粒子を考える．ここで，x^μ と p_μ のスピナー表現 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ $(\alpha=0,1;\dot{\alpha}=\dot{0},\dot{1})$ を用いて，$m=0$ の場合の L_{p2} は次のように書ける：

$$L_{p2}=-p_{\alpha\dot{\alpha}}\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}+\frac{1}{2}ep_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\alpha\dot{\alpha}} \ . \tag{2}$$

このとき e 対する Euler Lagrange 方程式 $p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\alpha\dot{\alpha}}=0$ が導かれる．この式は 2 成分スピナー $\bar{\pi}_\alpha(\tau)$ と $\pi_{\dot{\alpha}}(\tau)$ を用いて，$p_{\alpha\dot{\alpha}}=\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}$ と解ける．これを式 (2) に代入すると，次式が得られる：

$$L_{p2}=-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}. \tag{3}$$

次に，スピンをもつ粒子を記述するために，新たなスピナー $\psi^\alpha(\tau)$ と $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(\tau)$ を導入し，式 (3) を

$$\begin{aligned} L=&-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}-i\left(\psi^\alpha\dot{\bar{\pi}}_\alpha-\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}\right)\\ &-\frac{a}{2}\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}+2s\right) \end{aligned} \tag{4}$$

と修正する．ここで，s は粒子のヘリシティを表す数であり，$a(\tau)$ は補助変数である．以下，この Lagrangian を基にした正準形式を論じる．

3．ディラックの手法による正準形式

Lagrangian(4) における正準座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}},\bar{\pi}_\alpha,\pi_{\dot{\alpha}},\psi^\alpha,\bar{\psi}^{\dot{\alpha}},a)$ に対する，正準運動量を $(p^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}},p^{\alpha}_{(\bar{\pi})},p^{\dot{\alpha}}_{(\pi)},p^{(\psi)}_{\alpha},p^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}},p^{(a)})$ と表す．Lagrangian(4) のルジャンドル変換として，次の正準 Hamiltonian が得られる：

$$H_{\mathrm{C}}=\frac{a}{2}\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}+2s\right). \tag{5}$$

また，式 (4) より，次の第一次拘束条件が得られる：

$$\begin{aligned} &\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}\equiv P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}+\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}\approx 0\ , &&\phi^{(a)}\equiv P^{(a)}\approx 0\ ,\\ &\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}\equiv P^{\alpha}_{(\bar{\pi})}+i\psi^\alpha\approx 0\ , &&\phi^{(\psi)}_{\alpha}\equiv P^{(\psi)}_{\alpha}\approx 0\ ,\\ &\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}\equiv P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}-i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\approx 0\ , &&\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}\equiv P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}\approx 0\ . \end{aligned} \tag{6}$$

但し $\approx$ は弱い等号を表す．式 (5) および式 (6) から全 Hamiltonian は次のように定義される：

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{T}}\equiv H_{\mathrm{C}}&+u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}+u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}+u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}\\ &+u^{\alpha}_{(\psi)}\phi^{(\psi)}_{\alpha}+u^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}+u^{(a)}\phi^{(a)}\ . \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}$，$u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}$，$u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}$，$u^{\alpha}_{(\psi)}$，$u^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}$，$u^{(a)}$ はそれぞれの拘束条件に対する Lagrange 未定係数である．第一次拘束条件 (6) の時間発展を考えると，$\phi^{(a)}$ の時間発展から第二

[1] 日大理工・院・量子　[2] 日大・量科研

次拘束条件 $\chi^{(a)} \equiv \left(\psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} + 2s\right) \approx 0$ が得られる．ここで，得られた拘束条件の一次結合

$$\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} \equiv \phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} - i\phi^{(\psi)}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}} + i\bar{\pi}_{\alpha}\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} \approx 0 \ ,$$

$$\tilde{\chi}^{(a)} \equiv \chi^{(a)} - i\psi^{\alpha}\phi^{(\psi)}_{\alpha} + i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} + i\bar{\pi}_{\alpha}\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} - i\pi_{\dot{\alpha}}\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} \approx 0 \ .$$

を定義する．すると，詳細な考察により $\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$，$\phi^{(a)}$，$\tilde{\chi}^{(a)}$ は第一類拘束条件となり，$\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}$，$\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}$，$\phi^{(\psi)}_{\alpha}$，$\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}$ は第二類拘束条件となることがわかる．第二類拘束条件から構成される Dirac 括弧のもとで，これらの弱い等号は強い等号 (=) となる．このとき ψ^{α} と $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ はそれぞれ $\bar{\pi}_{\alpha}$ と $\pi_{\dot{\alpha}}$ の共役運動量とみなせる．また，$\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\tilde{\chi}^{(a)}$ はそれぞれ $\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\chi^{(a)}$ に等しくなる．結果として，正準座標と正準運動量の非自明な Dirac 括弧は次の 4 つとなる：

$$\begin{aligned} \left\{x^{\alpha\dot{\alpha}}, P^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\right\}_D &= \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \ , \quad \left\{a, P^{(a)}\right\}_D = 1 \ , \\ \left\{\bar{\pi}_{\alpha}, \psi^{\beta}\right\}_D &= i\delta^{\beta}_{\alpha} \ , \quad \left\{\pi_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\beta}}\right\}_D = -i\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \ . \end{aligned} \tag{8}$$

4．正準量子化

Dirac の手法に従い，Dirac 括弧 (8) を正準交換関係に置き換える：

$$\begin{aligned} \left[\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{P}^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\right] &= i\hbar\delta^{\alpha}{}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \ , \qquad \left[\hat{a}, \hat{P}^{(a)}\right] = i\hbar, \\ \left[\hat{\bar{\pi}}_{\alpha}, \hat{\psi}^{\beta}\right] &= -\hbar\delta_{\alpha}{}^{\beta} \ , \qquad \left[\hat{\pi}_{\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\psi}}^{\dot{\beta}}\right] = \hbar\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

これらの交換関係を基に正準座標を対角化する表示をとると，各演算子は次のように表現される：

$$\begin{aligned} &\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}}, \ \hat{P}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}, \ \hat{a} = a, \quad \hat{P}^{(a)} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial a}, \\ &\hat{\bar{\pi}}_{\alpha} = \bar{\pi}_{\alpha}, \quad \hat{\psi}^{\alpha} = \hbar\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}_{\alpha}}, \quad \hat{\pi}_{\dot{\alpha}} = \pi_{\dot{\alpha}}, \quad \hat{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}} = -\hbar\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}}. \end{aligned} \tag{10}$$

量子化の後，上で得られた 3 つの第一類拘束条件は物理的状態 $|\Psi\rangle$ を定める次のような条件と解釈される：$\hat{\phi}^{(a)}|\Psi\rangle = 0$，$\hat{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}|\Psi\rangle = 0$，$\hat{\chi}^{(a)}|\Psi\rangle = 0$．式 (10) の表現をとると，これらの条件は波動関数 $\Psi = \Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}, a)$ が満たす次の連立微分方程式になる：

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial a}\Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}, a) = 0 \ , \tag{11}$$

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} + \bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}}\right]\Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}, a) = 0 \ , \tag{12}$$

$$\hbar\left[\bar{\pi}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}_{\alpha}} - \pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}} + 2\frac{s}{\hbar}\right]\Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}, a) = 0 \ . \tag{13}$$

式 (11) から Ψ は a に依存しないことがわかる．これを踏まえ，式 (12) を解くと，平面波解 $\Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = \Phi(\bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}})e^{-\frac{i}{\hbar}x^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_{\beta}\pi_{\dot{\beta}}}$ が導かれる．さらに，この解を式 (13) に代入すると次式が得られる：

$$\left[\bar{\pi}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}_{\alpha}} - \pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}} + 2\frac{s}{\hbar}\right]\Phi(\bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \ . \tag{14}$$

これを解いて上の平面波解に代入すると，連立微分方程式 (11)–(13) の解として，次のようなスピンをもつ自由場の平面波解が得られる：

$$\begin{aligned} s = 0 \text{ のとき} \quad &: \Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}x^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_{\beta}\pi_{\dot{\beta}}}, \\ s = -\frac{\hbar}{2}n \text{ のとき} \quad &: \Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = C\prod_{i=1}^{n}\bar{\pi}_{\alpha_i}e^{-\frac{i}{\hbar}x^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_{\beta}\pi_{\dot{\beta}}}, \\ s = \frac{\hbar}{2}n \text{ のとき} \quad &: \Psi_{\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_n} = C\prod_{i=1}^{n}\pi_{\dot{\alpha}_i}e^{-\frac{i}{\hbar}x^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_{\beta}\pi_{\dot{\beta}}}. \end{aligned}$$

ここで，C は積分定数である．このとき，s は $s = \frac{\hbar}{2}n$ (n：整数) となり離散的な値となるので，ヘリシティ（スピン）が $\hbar/2$ を基本単位として量子化されたことが分る．

5．電磁場との相互作用

次に，上述の無質量粒子が電磁場と相互作用する場合を考える．ゲージ原理に従い，局所位相変換 $\pi'_{\dot{\alpha}} = e^{i\theta}\pi_{\dot{\alpha}}$，$\psi'^{\alpha} = e^{i\theta}\psi^{\alpha}$ $(\theta = \theta(x))$ を行う．この変換のもとで Lagrangian(4) が不変となるように，そこに含まれる τ 微分を共変微分 $D_{\tau} := \frac{d}{d\tau} - ie\dot{x}^{\mu}A_{\mu}$ に置き換える．すると，局所位相変換のもとで不変な Lagrangian が得られる：

$$\begin{aligned} L_2 = &-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}} - i\left(\psi^{\alpha}\bar{D}_{\tau}\bar{\pi}_{\alpha} - \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}D_{\tau}\pi_{\dot{\alpha}}\right) \\ &- \frac{a}{2}\left(\psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} + 2s\right) + \tilde{e}\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}(x) \ . \end{aligned} \tag{15}$$

ここで，ローレンツ力を導く項 $\tilde{e}\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}$ を加えた．式 (15) を基に，以前と同様に正準形式を構成し量子化を行う．

6．まとめと今後の課題

本研究では，可換なスピナー変数を用いてスピンをもつ無質量粒子の Lagrangian を与え，これをもとに正準形式を構成した．得られた拘束条件を第一類と第二類に分類した後，第二類拘束条件から Dirac 括弧を定義し，第一類拘束条件は，量子化した後に，物理的状態を定義する条件として読み換えた．これを波動方程式として表現し，それを解くことにより，スピンをもつ自由粒子の平面波解を導いた．このとき，ヘリシティ（スピン）は量子化されて $\hbar/2$ を基本単位とし離散的な値をとることがわった．また，上述の無質量粒子が電磁場と相互作用する場合を考え，これに対する正準形式を構成し量子化を行った．

スピンをもつ無質量粒子と Yang-Mills 場の相互作用を考察することは，今後の課題の一つである．

参考文献

[1] 後藤鉄男：拡がりをもつ素粒子像，物理学選書，岩波書店，(1978)．

[2] T. Shirafuji : Prog. Theor. Phys. , Vol. 70, No. 1, pp18-35, 1983.