O-14

Massive Thirring 模型と sine-Gordon 模型

Massive Thirring model and sine-Gordon model

◯ 金井大輔[*1] , 二瓶　武史[*2]
Daisuke Kanai,Takeshi Nihei

Abstract : The sine-Gordon model is the theory of a massless scalar field φ in one space and one time dimension with interaction density proportional to $\cos\beta\varphi$,where β is a real parameter. It is shown that the theory is equivalent to the zero-charge sector of the massive Thirring model.

1　はじめに

(a)Massive Thirring model は Walter Thirring(1958) によって唱えられた自己相互作用で記述される 2 次元ディラック場の理論である [1]. 本題では触れないが,Bethe Ansatz と呼ばれる手法を用いれば, この理論は完全に解くことができるということがよく知られている [2].

(b)Sine-Godon model は, ダランベルシアンと sine を含む 2 次元の非線形微分方程式である. その名前の由来は,Klain・gordon 方程式をもじって考えられた. 本題では触れないが, 古典的な解として, ソリトン解がよく知られている.

(C)Massive Thirring model と sine Gordon-model には場の記述がフェルミオンとボソンで違うのにも関わらず, その両理論において

$$\frac{1}{1+\frac{g}{\pi}} = \frac{\beta^2}{4\pi} \tag{1}$$

であれば, この 2 つが対等の理論であることが証明されている [3]. 今回は,Massive Thirring model と sine Gordon-mode の摂動を介して得られる真空期待値を比較することにより, この値を導く.

2　Massive Thirring model

Massive Thirring model とは, 自己相互作用を持つ 2 次元ディラック場の理論である. そのラグランジアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m')\psi - \frac{1}{2}gj^\mu j_\mu \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}gj^\mu j_\mu - m'\sigma \end{aligned} \tag{2}$$

で定義される $(\mu = 0, 1)$. ここで,

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad \sigma = \bar{\psi}\psi \tag{3}$$

である.g は結合定数.ψ は 2 成分スピノル.m' は質量.γ_μ は以下で定義される.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3　Sine-Gordon model

Sine-Gordon model とは 2 次元スカラー場の理論である. そのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{\alpha_0}{\beta^2}\cos\beta\varphi + \gamma_0 \tag{4}$$

で定義される.α_0, β, γ は実パラメータであり, その力学は,

$$\Box\varphi - \frac{\alpha_0}{\beta^2}\sin\beta\varphi = 0 \tag{5}$$

と表される.$\Box$ はダランベルシアンである.

[*1] 日大理工・院・物理
[*2] 日大理工・教員・物理

4　sine-Gordon model の真空期待値

Sine-Gordon model の相互作用項は, 次のように書き換えられる

$$\frac{\alpha}{\beta^2} N_m \cos\beta\varphi = \frac{\alpha}{2\beta^2}(A_+ + A_-) \tag{6}$$

ここで,

$$A_\pm = N_m e^{\pm i\beta\varphi} \tag{7}$$

である.N_m は正規積 (Normal product) である. これより,sine-Gordon model の真空期待値は

$$\mathrm{T}\langle 0|\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} N_m A_+(x_i)A_-(y_j)\rangle$$

$$= \frac{\prod_{i>j}[(x_i-x_j)^2(y_i-y_j)^2c^2m^4]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}}{\prod_{i,j}[cm^2(x_i-y_j)^2]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}} \tag{8}$$

と計算できる.m はカットオフに依存する定数である.

5　Massive Thirring model の真空期待値

Massive Thirring model において, 質量項は

$$m'\sigma = m'(\sigma_+ + \sigma_-) \tag{9}$$

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1\pm\gamma_5)\psi \tag{10}$$

である. ここで γ_5 は

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される. よって,massive Thirring model における真空期待値は,B.Klaiber[4] により

$$\mathrm{T}\langle 0|\prod_{i=1}^{n}\sigma_+(x_i)\sigma_-(y_i))|0\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{\prod_{i>j}[(x_i-x_j)^2(y_i-y_j)^2M^4]^{\frac{1}{1+\frac{g}{\pi}}}}{\prod_{i,j}[M^2(x_i-y_j)^2]^{\frac{1}{1+\frac{g}{\pi}}}} \tag{11}$$

と計算できる.M は任意定数である.

6　それぞれの真空期待値の比較

(8),(11) の任意パラメーターにおいて

$$M^2 = cm^2 \quad , \frac{1}{1+\frac{g}{\pi}} = \frac{\beta^2}{4\pi}$$

という風に値を選べば,Massive Thirring model と sine Gordon-model が同じ物理的現象を記述していると判断することが出来る.

7　まとめと今後の課題

両理論の真空期待値の関数系が一致しているので,sine-Gordon model と massive thirrng model が真空期待値の結果により同じ物理現象を記述すると解釈が出来る. 今後は, この両理論の相互作用の観点から, 両理論が対等であるかどうか見ていきたい.

参考文献

[1] W.Thirring,“A Soluble Relativistic Field Theory”Ann.Phys.(N.Y.) 3,91

[2] Korepin, V.E. (1979). “Direct calculation of the S matrix in the massive Thirring model”. Theor. Math. Phys. 41: 953. Bibcode 1979TMP....41..953K. doi:10.1007/BF01028501

[3] S. Coleman, “Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model”, Phys. Rev. D11 (1975), 2088-2097.

[4] B.Klaiber,in Lectures in theoretical physics,editted by A.Barut and W.Britten (Gordon and Breach, NY, 1968)