O-15

κ-ミンコフスキー時空上でのホーキング型輻射
Hawking-like radiation in κ-Minkowski spacetime

○宍倉善之[1]、仲滋文[2]
*Yoshiyuki Shishikura[1],Shigefumi Naka[2]

Abstract:κ-Minkowski spacetime is a noncommutative spacetime preserving quantum gravity effect associated with a Planck energy scale parameter κ, which is a observer-independent kinematical scale other than c. The effects of noncommutativity are expected to be large enough testing by astrophysical phenomena such as gamma-ray bursts, Hawking radiation, and so on. In this work, we discuss the non-trivial response by $\kappa \neq 0$ to the Hawking-like effect in a uniformly accelerating system.

１．はじめに

κ ミンコフスキー時空は，プランク・エネルギーの大きさを持つ定数 κ を光速 c とは別の座標系に依存しない自然定数として組み込んだ時空模型であり，量子重力の痕跡を残した非可換時空模型の一つとして知られている。κ に依存する非可換性の効果は，プランク・エネルギーに近い高エネルギー状態では顕著に現れるが，地上実験や天体現象においても現れていると考えられている．高エネルギーな物理現象としてブラックホールのホーキング輻射があるが，本研究ではホーキング輻射に類似した効果が現れる等加速度系のウンルー効果に注目する．これに対し $\kappa^{-1} \neq 0$ での影響がどのように現れるかを調べる。ウンルー効果は，リンドラー型の時空構造を基に評価されるが，本研究では Painlevé-Gulstrand 座標系に変換することにより，時空構造の次元を落としたブラックホール時空に帰着させ，ホーキング輻射に対する κ の効果を導く。具体的な手順としては，非可換時空上のスカラー場の理論を構築し，この場と相互作用を行う等加速度粒子が出す輻射の放出確率を評価する。

2．κ-ミンコフスキー時空の基本構造

κ-ミンコフスキー時空は，交換関係

$$[\hat{x}^0, \hat{x}^i] = \frac{i}{\kappa}\hat{x}^i \tag{1}$$

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0 \tag{2}$$

で特徴付けられる非可換時空である．この時空の平面波を $\hat{x}_i$ と $\hat{x}_0$ の非可換性を考慮して

$$\hat{e}_k \equiv : e^{-ip\cdot\hat{x}} := e^{-ip^0\hat{x}^0} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}} \tag{3}$$

と定義する．ここで，コロン記号は時間成分を左に，空間成分を右に配置する時間順序積である．この時，平面波の積 $\hat{e}_p\hat{e}_q = \hat{e}_{p\dot{+}q}$ は単純な位相の積を導かず，$p\dot{+}q = (p^0+q^0, \boldsymbol{p}e^{-q^0/\kappa}+\boldsymbol{q})$ となって，量子群の構造が現れる．また，$dx^A, (A=0,i,5)$ が $(\hat{x}^0, \hat{x}^i)$ 作用の下で 5 次元のベクトルとして変換されると仮定すると，平面波の微分は

$$d : e^{-ip\hat{x}} := -i : \chi_A(p) e^{-ip\hat{x}} : d\hat{x}^A \tag{4}$$

$$\chi_0(p) = \kappa\left[\sinh\frac{p_0}{\kappa} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\kappa^2}e^{p_0/\kappa}\right] \tag{5}$$

$$\chi_i(p) = p_i e^{p_0/\kappa} \tag{6}$$

$$\chi_5(p) = -\frac{i}{8}M_\kappa^2(p) \tag{7}$$

と求まる．ここで $M_\kappa^2(p) = \left(2\kappa\sinh\frac{p_0}{2\kappa}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 e^{p_0/\kappa}$ である．5 次元運動量を $(\mathcal{P}_A) \equiv (\chi_0, \vec{\chi}, \kappa + \frac{4i}{\kappa}\chi_5)$ と定義すれば，(5)，(6)，(7) 式から

$$(\mathcal{P}_0)^2 - (\mathcal{P}_i)^2 - (\mathcal{P}_5)^2 = -\kappa^2 \tag{8}$$

が導かれ，5 次元 de Sitter 空間に属することがわかる．分散関係は $\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}^\mu = M_\kappa^2(p)\left(1 + \frac{1}{4\kappa^2}M_\kappa^2(p)\right)$ と求められる．κ-ミンコフスキー時空でのフーリエ変換，逆変換を

$$\phi(\hat{x}) = \int_p \tilde{\phi}(p) : e^{-ip\hat{x}} : \tag{9}$$

$$(2\pi)^4\delta^4(p) = \int_{\hat{x}} : e^{-ip\hat{x}} : \tag{10}$$

と仮定する．ここで，$\int_x = \int d^4x, \int_p = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ である．分散関係と (9)，(10) 式から自由場（スカラー）

[1]日大理工・院 (前)・物理
[2]日大理工・教員・物理

の作用は

$$S = \int_p \tilde{\phi}^\dagger(p)\Delta_F^{-1}(p)\tilde{\phi}(p) \tag{11}$$

$$\Delta_F^{-1}(p) = \left[M_\kappa^2(p)\left(1+\frac{M_\kappa^2(p)}{4\kappa^2}\right) - m^2 + i\epsilon\right] \tag{12}$$

と書ける．これより，自由場でのワイトマン関数は $\Delta x = x - y$ として

$$\begin{aligned} W_+(\Delta x) &= \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi}\left\{\xi - \frac{i\Delta x_0}{\kappa}\left(\frac{3(\Delta x_0)^2 + (\Delta \boldsymbol{x})^2}{\xi}\right)\right\}^{-1} \\ &\quad + O(\kappa^{-2}) \end{aligned} \tag{13}$$

と求まる．ここで，$\xi = (\Delta x_0)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2$ を表す．同様に，$W_-(\Delta x) = \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle$ を求めると，同じ近似で $W_+(\Delta x)$ に一致するが，$W_-(-\Delta x) \neq W_+(\Delta x)$ となることから $\kappa \neq 0$ の場合に Lorentz 対称性が破れることがわかる．

3. κ-ミンコフスキー時空上でのウンルー効果

ウンルー効果は Rindler 系（等加速度系：α =const）

$$X^0(\tau) = \alpha^{-1}\sinh \alpha\tau \tag{14}$$

$$X^1(\tau) = \alpha^{-1}\cosh \alpha\tau \tag{15}$$

$$X^2(\tau) = X^3(\tau) = 0 \tag{16}$$

で運動する観測者にとって真空が熱的に励起して見える現象である．リンドラー座標ではホライズンが存在することからホーキング輻射に類似した効果が現れる．

まず，Massless スカラー場と検出器の相互作用を

$$S_I = g\int d\tau[\mathcal{M}^\dagger(\tau)\phi(X(\tau)) + \phi(X(\tau))\mathcal{M}(\tau)] \tag{17}$$

と仮定する．ここで，$X(\tau)$ は検出器の world line, $\mathcal{M}(\tau)$ は検出器の monopole moment を表す．検出器が基底状態 E_0 から E へ，場の状態がミンコフスキー真空 $|0_M\rangle$ から $|\phi\rangle$ となる単位時間当たりの遷移確率は

$$\begin{aligned} R(\tau_0, E) = g^2\sum_E &[M_+(E,E_0)S_+(\tau_0,E) \\ &+ M_-(E,E_0)S_-(\tau_0,E)] \end{aligned} \tag{18}$$

と求まる，このとき，$S_\pm$ は応答関数と呼ばれ，ミンコフスキー真空での輻射を表す．$S_\pm$ はそれぞれ

$$S_+(\tau_0,E) = \frac{\alpha}{2\pi}s_{BE}(2E/\alpha) + O(\kappa^{-2}) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} S_-(\tau_0,E) = &-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\alpha}{2\kappa} \\ &\times\left\{\left[\frac{\alpha}{2E}A(\tau_0) - \frac{2E}{\alpha}B(\tau_0)\right]s_{BE}(2E/\alpha)\right. \\ &\left.+\frac{1}{\pi}C(\tau_0)s(2E/\alpha)\right\} + O(\kappa^{-2}) \end{aligned} \tag{20}$$

と求められる．ここで，$s_{BE}(2E/\alpha)$ はボース・アインシュタインの分配関数，$s(2E/\alpha)$ は s_{BE} の積分で表される分配関数である．また，A, B, C は $e^{\pm\alpha\tau_0}$ の多項式となっている．これより，S_+ では κ の影響が無いが，S_- では κ^{-1} の項で影響が現れることがわかる．

4. κ-ミンコフスキー時空上でのホーキング型輻射

ウンルー効果をホーキング輻射へ修正するために，(14)，(15) 式を Painlevé-Gulstrand 座標

$$X_0 = \frac{\sqrt{1+2\alpha x_R}}{\alpha}\sinh(\alpha\tau) \tag{21}$$

$$X_1 = \frac{\sqrt{1+2\alpha x_R}}{\alpha}\cosh(\alpha\tau) \tag{22}$$

へ書き換える．ここで，x_R は初期位置であり，$x_R = -\frac{1}{2a}$ にホライズンが現れる．本研究では $x_R \geq -\frac{1}{2a}$ と設定し，ホライズンの外側での輻射を評価する．(21)，(22) 式での書き換えによってリンドラー計量から $(1+1)$ 次元シュバルツシルト計量へ変換され，次元を落としたブラックホールでのホーキング輻射を記述できる．結果、応答関数 (19)，(20) 式は

$$S_+^{Hawking}(\tau_0,E) = \frac{1}{1+2\alpha x_R}S_+(\tau_0,E) \tag{23}$$

$$S_-^{Hawking}(\tau_0,E) = \frac{1}{(\sqrt{1+2\alpha x_R})^3}S_-(\tau_0,E) \tag{24}$$

と修正でき，ホライゾン近傍での輻射の増加が認められる．

5. まとめと課題

本研究では κ-ミンコフスキー時空上でのホーキング輻射を検証した．ブラックホールの次元を落として評価したため，4 次元でのホーキング輻射を評価すること，またホライズンの内側での評価をすることが今後の課題である．

6. 参考文献

[1]Hyeong-Chan Kim and Jae Hyung Yee,Phys.Rev.D75:045017,2007

[2]Andrea de Gill, Douglas Singleton, Valeria Akhmedova, Terry Pilling,Am.J.Phys.78(7),July 2010