O-16

NJL_2 模型における q 変形
The q-deformed NJL_2 model

○福嶋孝則[1]　仲滋文[2]
*Takanori Fukushima[1],Shigefumi Naka[2]

abstract: Recently, it is sometimes stressed that the effect of q-deformation in the NJL gap equation improves the phenomenological results of chiral condensation including the value of pion decay constant. The meaning of the q-parameter is, however, not obvious. The purpose of this work is to study the relation between the effect of $q \neq 1$and an inhomogeneous condensation based on the chiral NJL_2 model.

1．はじめに

NJL 模型は，物性理論の超電導理論と類似の機構を通して，素粒子のカイラル対称性を自発的に破り得る模型として 1961 年に南部，Jona-Lasinio により提唱され，“ 対称性の破れ ”を議論する上での原型となった．対称性の破れの結果によって生じるカイラルフェルミオンの質量は，gap 方程式と呼ばれる方程式の定数解として決定されるが，これと共に導かれる π 中間子の崩壊定数は若干の修正を必要とした．近年，この修正をフェルミ場の量子変形と関係付けた議論により幾つかの成果が導かれた．しかし，このような量子変形の物理的意味は必ずしも明らかではなかった．本研究は，NJL 模型の特徴に加えて QCD と同じ漸近的自由性をもち，ハドロン力学の低次元模型として知られる NJL_2 模型を使い，カイラル対称性の破れにおける量子変形の意味を探ることを目的とする．このため，以下では gap 方程式からカイラルフェルミオンの凝集場に対する非線形方程式を導く．次に，この方程式のソリトン解と量子変形の関係を調べる．

2．NJL 模型の SU(2) 構造

NJL 模型の gap 方程式の導出方法には様々な方法があるが，BCS 型の基底状態によるハミルトニアンの期待値を最小にする条件から，簡単に導くことができる．このために，まずカイラルフェルミオンの p 表示から定義される生成消滅演算子 $b(p,s)$，$d(p,s)$(s: ヘリシティ）を使い，

$$A_p{}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}[b^{\dagger}(p,+)d^{\dagger}(-p,+) - b^{\dagger}(p,-)d^{\dagger}(-p,-)] \tag{1}$$

$$N_p = \sum_s (b^{\dagger}(p,s)b(p,s) + d^{\dagger}(-p,s)d(-p,s)) \tag{2}$$

と置き，更に $J_{+,p} = \sqrt{2}A_p{}^{\dagger}$，$J_{-,p} = \sqrt{2}A_p$，$J_{0,p} = \frac{N_p}{2} - 1$ と定義すると，SU(2) 生成子の交換関係

$$[J_{+,p}, J_{-,p'}] = 2J_{0,p}\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{3}$$

$$[J_{0,p}, J_{\pm,p'}] = J_{\pm,p}\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{4}$$

を確かめることができる．この生成子を使うことにより，ハミルトニアンは

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\{p2J_{0,p} + M(J_{+,p} + J_{-,p})\} \tag{5}$$

と表される．次いで SU(2) コヒーレント状態

$$|NJL\rangle = Ne^{-\sum_p \xi_p \frac{1}{\sqrt{2}} J_{+,p}}|0\rangle \tag{6}$$

を用いてハミルトニアンの期待値を計算する．ここで N は，規格化因子

$$N = \frac{1}{\sqrt{\prod_p (1 + \frac{\xi_p{}^2}{2})}} \tag{7}$$

であり，gap 方程式は ξ の変分でハミルトニアンの極値条件を求めることにより導くことができ，次の形になる．

$$M = -G\langle\bar{\psi}\psi\rangle = 4G\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \tag{8}$$

右辺の積分に切断因子，フレーバー，カラーの自由度を付加し，M を決定する．これらのパラメーターを使って π 中間子崩壊定数を求めると，$F_\pi = 88MeV$ となり，実験値（$93MeV$）より，小さな値となる．

[1]日大理工・院（前）・物理
[2]日大理工・教員・物理

３．Lie 代数の q 変形

NJL 模型の q 変形を行い，先程と同様に gap 方程式を導出する．まず，q 変形された SU(2) の交換関係は,

$$[J_{+,p}, J_{-,p'}] = (qr^{-1})^{J-J_{0,p}}[2J_{0,p}]\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \quad (9)$$

$$[J_{0,p}, J_{\pm,p'}] = J_{\pm,p}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \quad (10)$$

と書き表すことができる．ここで

$$[X] = \frac{q^X - r^{-X}}{q - r^{-1}} \quad (11)$$

は，変形を表すパラメーター（r, q）の関数である．次に，$SU_q(2)$ コヒーレント状態は

$$|NJL\rangle_q = N_q e_q^{-\sum_p \xi_p \frac{1}{\sqrt{2}} J_{+,p}}|0\rangle, \quad (12)$$

$$N_q = \frac{1}{\sqrt{\prod_p (1 + \frac{[2]|\xi_p|^2}{2} + \left(\frac{|\xi_p|^2}{2}\right)^2)}} \quad (13)$$

である．

ハミルトニアン (5) の生成子を $SU_q(2)$ の生成子に置き換え，NJL 模型 (12) による期待値の極値条件から，q 変形された gap 方程式

$$M^* = 4G^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} \quad (14)$$

を得る．ここで，$M^* = \sqrt{\frac{[2]}{2}}M$，$G^* = G[2]$ である．この記号は，$r = 1$，$q = 1$ の時に，F_π の正しい観測値を導く．

４．(1+1) 次元での NJL 模型（NJL_2）

NJL_2 模型は，(1+1) 次元の NJL 模型であり，くり込み可能かつ，漸近的自由を持つため，QCD の有効理論と考えられている．この模型の gap 方程式は定数の M のみならず，空間変数に依存する擬集場 $\Delta = \langle\bar{\psi}\psi\rangle - i\langle\bar{\psi}i\gamma^5\psi\rangle$ に対しても解を持つ．これを調べるために，一粒子フェルミオンのハミルトニアンが,

$$H = \begin{pmatrix} -i\frac{d}{dx} & \Delta(x) \\ \Delta^*(x) & i\frac{d}{dx} \end{pmatrix} \quad (15)$$

と書けることに注意して Δ の有効作用を求めると,

$$S_{eff}[\Delta] = -\frac{1}{2g^2N_f}\int d^2x|\Delta|^2 - \ln\det\left[i\partial\!\!\!/ - \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Delta - \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Delta^*\right] \quad (16)$$

となる．これを使い gap 方程式を導くと,

$$\Delta(x) = -iNg^2 tr[\gamma^0(\mathbf{1}+\gamma^5)R(x;E)] \quad (17)$$

となる．ここで，γ^0，γ^5 は，それぞれ σ_1，σ_3 であり，また $R(x;E)$ は,

$$R(x;E) = \langle x|\frac{1}{H-E}|x\rangle \quad (18)$$

である．R(x;E) は x に関する１階の微分方程式を満たし，これと（17）を合わせると

$$\Delta'' - 2|\Delta|^2\Delta + i(b-2E)\Delta' - (2a - Eb)\Delta = 0 \quad (19)$$

が導かれる．ここで，a，b は R を Δ で表す際に含まれるパラメーターであり,（19）はこれらの値や境界条件に従い多様なソリトン解を許す.

(15) のハミルトニアンを（5）に対応させて p 表示のフェルミオンを使って書くために，$S_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$，$\frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \sigma_2) = S_\pm$ 及び $\tilde{J}_3(p) = \tilde{\psi}(p)S_3\tilde{\psi}(p)$，$\tilde{J}_\pm(p) = \tilde{\psi}^\dagger(p)S_\pm\Delta(i\partial_p)\tilde{\psi}(p)$ と定義すると，容易に

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\{p2\tilde{J}_3(p) + (\tilde{J}_+(p) + \tilde{J}_-(p))\} \quad (20)$$

と書ける．ある種のソリトン解に結び付いた $\tilde{J}_3$，$\tilde{J}_\pm$ が（9）に対応する量子群を導く可能性は Faddeev により指摘されている.

５．まとめと今後の課題

NJL 模型の SU(2) における q 変形について確認した．また，NJL_2 模型における凝集場に対する非線形方程式を導いた．今後は，この方程式のソリトン解を求めて q 変形との関係を調べ，QCD の相転位との関係を含めて q 変形の物理的意味を探っていく.

６．参考文献

[1] S.S.Avancini, J.R.Marinelli, D.P.Menezes and M.M.Watanabe, arXiv:nucl-th/0012091v2 28 Dec 2000.

[2] Gokce Basar, Gerald V. Dunne and Michael Thies, arXiv:0903.1868v1[hep-th]10 Mar 2009.

[3] D.J.Gross and A.Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974).

[4] L.A.Ibort and M.A.Rodriguez, Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Therapy 1-24.

[5] V. S. Timóteo and C. L. Lima, arXiv:nucl-th/9905041v1 19 May 1999.

[6] D. Bonatsos and C. Daskaloyannis, Prog. in Part. and Nucl. Phys. **43** (1999) 537.