O-26

ツイスター関数のノルムの性質と無質量場の特異点の関係

A relationship between properties of norm for twistor functions and singularities in massless fields.

○野手順一[1]，出口真一[2]

Jun-ichi Note, Shinichi Deguchi

Abstract: Penrose has proposed the twistor quantization in 1968 to find a quantum theory for the twistor formulation. To construct a Hilbert space in this formulation, Penrose defined an inner product of functions on the twistor space (so-called twistor functions). In this definition, convergence in the norm and orthogonality of the twistor functions are assumed. Also, the domains of operators are unclear. To construct a desirable Hilbert space, we define the inner product that gives a convergent norm for a class of twistor functions. Then, it is seen that the norm is positive definite or indefinite. The relationship between (in)definiteness of the norm and singularities in massless fields is clarified. Also the domains of operators becomes well-defined.

1．はじめに

ツイスター理論は，量子重力への１つのアプローチとして 1967 年に Penrose によって提唱された．この理論においては，相対論を記述する空間として Minkowski 空間よりもツイスター空間とよばれる３次元複素射影空間が基本的であると考える．この考え方にもとづいて，ツイスター空間で相対論的物理法則を解析する．ここで，ツイスター空間の要素であるツイスターは Weyl スピノル $(\omega^{\alpha})_{\alpha=0,1}$ と $(\pi_{\dot\alpha})_{\dot\alpha=\dot0,\dot1}$ の組であり次式のように定義される：

$$Z^A = (\,\omega^{\alpha}\,,\,\pi_{\dot\alpha}\,), \quad A = 0,1,2,3. \tag{1}$$

このツイスター Z^A は Minkowski 空間の１本の光線を指定する．そして，ツイスター空間の１本の直線は Minkowski 空間の１点を指定する．つまり，ツイスターは非局所的な光線を基本として時空を記述する量である．またツイスター空間の双対空間の要素は

$$\overline{Z}_A = (\,\overline{\pi}_{\alpha}\,,\,\overline{\omega}^{\dot\alpha}\,), \quad A = 0,1,2,3, \tag{2}$$

（ここで $\overline{\pi}_{\alpha}$ と $\overline{\omega}^{\dot\alpha}$ はそれぞれ $\pi_{\dot\alpha}$ と ω^{α} の複素共役である）と定義される．よってツイスター空間の内積は

$$\overline{Z}_A Z^A = |a^0|^2 + |a^1|^2 - |a^2|^2 - |a^3|^2 \tag{3}$$

と与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z^0 + Z^2\right), \quad a^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z^1 + Z^3\right), \\ a^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z^2 - Z^0\right), \quad a^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z^3 - Z^1\right), \end{aligned} \tag{4}$$

である．式 (3) からわかるようにツイスター空間は $SU(2,2)$ 群の表現空間である．

この理論の利点としては，任意のヘリシティをもつ無質量自由場を統一的に構成できること，Yang-Mills 方程式のすべてのインスタントン解を導出できること，グルーオンの散乱振幅の摂動計算が簡単化されることなどがある．

任意のヘリシティ h をもつ無質量自由粒子の作用はツイスター変数 Z^A と $\overline{Z}_A$ をもちいると

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[i\overline{Z}_A \frac{dZ^A}{d\tau} + \rho\left(\,\overline{Z}_A Z^A - 2h\right)\right] d\tau \tag{5}$$

と表記される．ただし，τ はパラメータであり，ρ は補助変数である．この作用を基にして，正準量子化の手続きを実行するとツイスター演算子の交換関係

$$[\,\hat{Z}^A, \hat{Z}^B\,] = 0\,, \quad [\,\hat{\overline{Z}}_A, \hat{\overline{Z}}_B\,] = 0\,, \quad [\,\hat{Z}^A, \hat{\overline{Z}}_B\,] = \delta^A_B\,, \tag{6}$$

が得られる．これらから $SU(2,2)$ 生成子の Schwinger 表現を構成することができる．式 (6) より，Penrose はツイスター演算子の表現として

$$\hat{Z^A} \doteq Z^A\,, \quad \hat{\overline{Z}}_A \doteq -\frac{\partial}{\partial Z^A}, \tag{7}$$

[1]日大理工・院・量子
[2]日大・教員・量科研

を採用している [1].

次に，式 (5) の作用 S を ρ で変分すると $\overline{Z}_A Z^A - 2h = 0$ という拘束条件が得られる．この拘束条件を量子化して物理的状態にかけて 0 であることを要請すると

$$\left(-Z^A \frac{\partial}{\partial Z^A} - 2 - 2h\right) f(Z^A) = 0 \tag{8}$$

となる．この物理的状態 $f(Z^A)$（ツイスター関数とよばれる）に１価性を課すとヘリシティ h は量子化されて半整数または整数になる．また，$f(Z^A)$ を積分変換すると Minkowski 空間上の任意ヘリシティの無質量自由場を統一的に構成できる．例えば正ヘリシティ($h = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots.$) の場合には

$$\phi_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cdots\dot{\alpha}_{2h}}(x) = \oint_{C_x} \pi_{\dot{\alpha}_1}\pi_{\dot{\alpha}_2}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_{2h}} f(Z^A)\pi_{\dot{\delta}} d\pi^{\dot{\delta}} \tag{9}$$

である．これは無質量自由場方程式 $\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\phi_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}_2\cdots\dot{\alpha}_{2h}}(x) = 0$ を満たすことがわかる．ここで，正エネルギーの場を構成するような $f(Z^A)$ は，ツイスター空間の部分領域 $\mathbb{PT}^+ := \{\,[Z^A]\,|\,\overline{Z}_A Z^A > 0\,\}$ 上で定義されている．

このような量子化の理論形式における Hilbert 空間は，ツイスター関数 $f(Z^A)$ に対して式 (7) の演算子表現が成立するような内積を定義して構成されている [1]. この定義においては，ツイスター関数 $f(Z^A)$ のノルム収束性と直交性は仮定されていて，さらに演算子の定義域などは不明である．そこで本研究ではツイスター関数 $f(Z^A)$ に対する明確な内積を定義してこれらの不明な点を明らかにする．さらに，ツイスター関数のノルムの性質と構成される無質量自由場の性質の関係を調べる．

2．ツイスター関数に対する明確な内積の定義

式 (6) の交換関係は，式 (4) の変数 a^A を用いると

$$[\hat{a}^A, \hat{a}^B] = 0\,, \quad [\hat{a}^{\dagger A}, \hat{a}^{\dagger B}] = 0\,, \quad [\hat{a}^A, \hat{a}^{\dagger B}] = I^{AB}\,, \tag{10}$$

(ただし，$A, B = 0,1,2,3, \quad I = \mathrm{diag}(+1,+1,-1,-1)$ である）となり，不定計量の生成消滅演算子の形であることがわかる．本研究では，式 (10) を基にして議論する．

まず，ツイスター演算子 $\hat{a}^A$ と $\hat{a}^{\dagger A}$ の表現を求めるために，$\hat{a}^{\dagger A}$ の固有状態（コヒーレント状態）を構成して，これを基底とすると次式が得られる：

$$\hat{a}^A \doteq a^A\,, \quad \hat{a}^{\dagger A} \doteq -\frac{\partial}{\partial a^B} I^{BA}\,. \tag{11}$$

この表現は，式 (4) の関係式から式 (11) の変数 a^A を変数 Z^A に書き換えることにより，式 (7) の表現と同一であることがわかる．

次にツイスター関数は式 (11) の表現をもちいると

$$\begin{gathered} f(a^A) := (a^0)^k (a^1)^\ell (a^2)^m (a^3)^n\,, \\ k + \ell + m + n = -2h - 2, \end{gathered} \tag{12}$$

と表される．このツイスター関数はツイスター演算子 $\hat{a}^A$ と $\hat{a}^{\dagger A}$ から構成される $SU(2,2)$ の１つの Casimir 演算子と３つの Cartan 部分代数生成子の同時固有関数であることがわかる．これらの固有値でツイスター関数はパラメトライズされる．ここで，Casimir 演算子の固有値は $SU(2,2)$ の表現空間を指定し，Cartan 部分代数の固有値は表現空間のベクトルをラベルする．

本研究では，異なるパラメータをもつツイスター関数は直交すること，演算子の共役性が成立すること，ツイスター関数の定義域が $\mathbb{PT}^+$ であることなどの必要条件を満足するような内積を定義した．この定義に従えば，パラメータの値の範囲に応じてノルムは正値または不定値であることがわかる．さらに，正値ノルムのツイスター関数を積分変換して得られる Minkowski 空間上の正エネルギー場は特異点をもたないことがわかり，不定値ノルムの場合には特異点をもつことがわかる．また，ツイスター演算子の定義域は，$\mathbb{PT}^+$ 上の正値（不定値）ノルムのツイスター関数族であることがわかる．このツイスター関数族においてツイスター演算子および $SU(2,2)$ 生成子の作用は閉じていることが確認できる．

3．まとめと今後の課題

ツイスター関数に対する明確な内積を定義した．今後は Hilbert 空間の完全性関係を考察して，ツイスター量子化の経路積分形式を構築する．

参考文献

[1] R. Penrose, In *Quantum Gravity, an Oxford Symposium*, eds. C. J. Isham, R. Penrose and D. W. Sciama, (Oxford University Press, Oxford, 1975).