O-27

SU(2)Yang-Mills 理論における補助場の方法と有効ポテンシャル

An auxiliary field method in SU(2) Yang-Mills theory and the effective potential

○鈴木隆史[1]，　出口真一[2]
*Takafumi Suzuki[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We make a generalization of the auxiliary field method to the SU(2) Yang-Mills theory with a constant color magnetic field, and resolve the instability of the Savvidy vacuum by involving the interaction terms of order 4.

1．導入

SU(2)Yang-Mills(YM) 理論において，一定のカラー磁場が存在するとき，系の有効ポテンシャルが最小となり，非自明な真空 (Savvidy 真空) が現れることが知られている [1]．しかし，この直後，この有効ポテンシャルは虚数項をもち，そのために Savvidy 真空は不安定であることが指摘された [2]．

本研究では，この虚数項が現れる原因を YM 場の 4 次の項を無視したことにあると考え，4 次の項を考慮した有効ポテンシャルを導出する．実際に，非摂動的な手法の 1 つである補助場の方法を用いることで，我々は 4 次の項を考慮した有効ポテンシャルを導出する．このようにして得られた有効ポテンシャルを評価すると，虚数項が現れない補助場の範囲内にカラー磁場のある真空 (改良された Savvidy 真空) が存在することがわかる．このとき，安定な真空で質量次元 2 の真空凝縮 [3] がおこることを確かめる．また我々は，系のユニタリー性をより明確に保持するために，BRST 不変性を保つ補助場の方法を提案する．この方法は，いままでの議論にフェルミ統計に従う補助場を導入することで定式化される．

2．SU(2)YM 理論の有効ポテンシャル

SU(2)YM 場 $A^a_\mu(a=1,2,3\,;\,\mu=0,1,2,3)$ のラグランジアンは，次式で与えられる:

$$\mathcal{L}_{\rm YM}=-\frac{1}{4g^2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}. \tag{1}$$

ただし，$F^a_{\mu\nu}$ は A^a_μ の場の強さであり，g は裸の結合定数である．A^a_μ を対角成分 $A_\mu\equiv A^3_\mu$ と非対角成分 $W_\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu+iA^2_\mu)$ に分ける．さらに，$F_{\mu\nu}$ を $F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ と定義して，一定のカラー磁場 $H=F_{12}$ を与える YM 場 $A_\mu=(0,0,Hx^1,0)$ を選ぶ．いま，W_μ が H に与える量子効果を求めるために，最大アーベリアンゲージ ($D_\mu W^\mu=0$) を採用して BRST 形式を用いてラグランジアンにゲージ固定項を加えると，次の生成汎関数 Z_1 が得られる:

$$\begin{aligned}Z_1=&N_1\int\mathcal{DM}_1\exp\bigg[-\frac{i}{g^2}\int d^4x\bigg\{\frac14F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\&-W^*_\mu(D_\rho D^\rho g^{\mu\nu}-2iF^{\mu\nu})W_\nu\\&-i\bar{C}^*D^\mu D_\mu C-i\bar{C}(D^\mu D_\mu C)^*\\&+\frac14k\mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{A}^{\mu\nu}+\frac12(1-k)\left(\mathcal{S}^2-|\mathcal{U}|^2\right)\bigg\}\bigg].\end{aligned} \tag{2}$$

ただし $\mathcal{DM}_1\equiv\mathcal{D}W_\mu\mathcal{D}W^*_\mu\mathcal{D}C\mathcal{D}C^*\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}\bar{C}^*$，$\mathcal{A}_{\mu\nu}\equiv i(W^*_\mu W_\nu-W^*_\nu W_\mu)$，$\mathcal{S}\equiv W^*_\mu W^\mu-\frac{i}{1-k}(\bar{C}^*C-C^*\bar{C})$，$\mathcal{U}\equiv W_\mu W^\mu-\frac{2i}{1-k}\bar{C}C$，$D_\mu\equiv\partial_\mu-iA_\mu$ であり，C は FP ゴースト場，$\bar{C}$ は反ゴースト場である．また，式 (2) の $\frac14k\mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{A}^{\mu\nu}+\frac12(1-k)(\mathcal{S}^2-|\mathcal{U}|^2)$ は YM 場の 4 次の項であり，k は 4 次の項の表し方を指定するパラメータである．式 (2) は 4 次の項があるため経路積分 (ガウス積分) ができない．そこで補助場として，実反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$，実スカラー場 Φ，複素スカラー場 Ψ を導入し，補助場の方法を用いる．次の補助場の因子

$$\begin{aligned}Z_2=&N_2\int\mathcal{DM}_2\exp\bigg[\frac{i}{g^2}\int d^4x\bigg\{\frac{k}{4}(\mathcal{B}_{\mu\nu}-\mathcal{A}_{\mu\nu})^2\\&+\frac{1-k}{2}((\Phi-\mathcal{S})^2-|\Psi-\mathcal{U}|^2)\bigg\}\bigg]=1\end{aligned} \tag{3}$$

($\mathcal{DM}_2\equiv\mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\Psi^*$) を式 (2) に掛けて積分測度の順序を変え，指数関数の中を整理する．すると，式 (2) の 4 次の項は YM 場の 2 次形式に書き換えられて，経路積分を実行できるようになる．このことから，$\mathcal{DM}_1$ の経路積分を実行すると有効作用 $\mathcal{W}$ が次のように得られる:

$$\mathcal{W}=\int d^4x\mathcal{L}_0+\frac{i}{2}\ln\left(\frac{{\rm Det}(\mathcal{H})}{{\rm Det}(\mathcal{H}[0])}\right)-i\ln\left(\frac{{\rm Det}(\mathfrak{H})}{{\rm Det}(\mathfrak{H}[0])}\right). \tag{4}$$

ただし，$\mathcal{L}_0\equiv-\frac{1}{g^2}[\frac14F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{k}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}-\frac12(1-k)(\Phi^2-|\Psi|^2)]$，$\mathcal{H}^{+,\nu+}_\mu=\left(\mathcal{H}^{-,\nu-}_\mu\right)^*\equiv\{D_\rho D^\rho-(1-k)\Phi\}\delta_\mu{}^\nu-2i\mathcal{F}_\mu{}^\nu$，$\mathcal{H}^{+,\nu-}_\mu=\left(\mathcal{H}^{-,\nu+}_\mu\right)^*\equiv(1-k)\Psi\delta_\mu{}^\nu$，$\mathfrak{H}^{++}=(\mathfrak{H}^{--})^*\equiv D_\mu D^\mu+\Phi$，$\mathfrak{H}^{+-}=(\mathfrak{H}^{-+})^*\equiv-\Psi$ であり，$\mathcal{F}_{\mu\nu}\equiv F_{\mu\nu}+\mathcal{B}_{\mu\nu}$ を定義した．ここで，$\mathcal{L}_0$ は古典項であり，式 (4) の第 2 項と第 3 項は量子論的な効果である．

[1] 日大理工・院・量子　[2] 日大・量科研

有効作用$\mathcal{W}$を基に有効ポテンシャルを導出するために，補助場を全て定数として，ユニタリー性を保持するようにkを$k=2$と選ぶと，有効ポテンシャル$V(H,b_{\mu\nu},\rho,\sigma)$が得られる:

$$
\begin{aligned}
V(H,b_{\mu\nu},\rho,\sigma)=&\frac{H^2}{2g^2}\Bigg[-3+2\left(b_{12}+2\right)^2+2\tilde{b}^2+4\rho\sigma\\
&+\frac{g^2}{4\pi^2}\Bigg\{\left(\rho^2+\sigma^2-\frac{1}{6}\right)\left(\ln\frac{H}{\bar{\mu}^2}\right)\\
&+\zeta^{'}\left(-1,\rho+\frac{1}{2}\right)+\zeta^{'}\left(-1,\sigma+\frac{1}{2}\right)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし，$b_{\mu\nu}\equiv\mathcal{B}_{\mu\nu}/H$, $\rho\equiv(\Phi+\sqrt{|\Psi|^2+2\mathcal{F}^2})/2H$, $\sigma\equiv(\Phi-\sqrt{|\Psi|^2+2\mathcal{F}^2})/2H$, $\tilde{b}^2\equiv\sum_{\mu<\nu}b_{\mu\nu}b_{\mu\nu}-(b_{12})^2$ であり，$\bar{\mu}^2$ は質量次元のパラメータで，$\zeta(s,z)$ はホロビッツのゼータ関数である ($\zeta^{'}(s,z)\equiv\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,z)$).

3．有効ポテンシャルの評価

式 (5) から有効ポテンシャル V に虚数項が現れない範囲が $\rho\geq-\frac{1}{2}$, $\sigma\geq-\frac{1}{2}$ と得られる．この範囲内で V の評価を行うと，V が最小値をとるためには $b_{\mu\nu}=b^{(0)}_{\mu\nu}\equiv-2\left({\delta_\mu}^1{\delta_\nu}^2-{\delta_\nu}^1{\delta_\mu}^2\right)$ を選ぶ必要があることがわかる．実際に，$b_{\mu\nu}=b^{(0)}_{\mu\nu}$ とすると $\sqrt{|\Psi|^2+2\mathcal{F}^2}=\sqrt{|\Psi|^2+4H^2}\geq 2H$ となるので，ρ と σ の間に関係式 $\rho-\sigma\geq 2$ が成り立つ．この範囲は，系の漸近的自由性を保持する範囲 $\rho^2+\sigma^2-\frac{1}{6}>0$ を満たしている．このことから，領域 $\Sigma\equiv\{(\rho,\sigma)|\rho-2\geq\sigma\geq-\frac{1}{2}\}$ は，安定な真空が存在する範囲となる．領域 Σ 内で有効ポテンシャルを評価すると，$V(H,b^{(0)}_{\mu\nu},\rho,\sigma)$ は $H=H_0\equiv\bar{\mu}^2\exp[(\rho^2+\sigma^2-\frac{1}{6})^{-1}\{\frac{4\pi^2}{g^2}(3-4\rho\sigma)-2\zeta^{'}\left(-1,\rho+\frac{1}{2}\right)-2\zeta^{'}\left(-1,\sigma+\frac{1}{2}\right)\}-\frac{1}{2}]$ のとき，最小値をもつことがわかる．

いま，有効ポテンシャルが最小値をとるためには，$b^{(0)}_{\mu\nu}$ と H_0 を選ぶ必要があることがわかった．このことから，$\tilde{v}(\rho,\sigma)$ を $\tilde{v}(\rho,\sigma)\equiv\frac{2g^2}{\bar{\mu}^4}V(H_0,b^{(0)}_{\mu\nu},\rho,\sigma)$ と定義して，$\tilde{v}(\rho,\sigma)$ の評価を行う．このとき，解析的な評価と合わせて Mathematica を用いた数値的な評価も行う．すると，$g\leq 4\pi$ のとき，$\tilde{v}$ には最小値のみが存在して，$g>4\pi$ のとき，$\tilde{v}$ には最大値 (極大値) と最小値が存在することがわかる．また，最大値での ρ と σ の値は $(\rho,\sigma)=(\rho,\chi_0\sigma)$, $\rho\to\infty$ と求まり，最小値での ρ と σ の値は $(\rho,\sigma)=(1.5,-0.5)$ と求まる．ただし，χ_0 は $0<\chi_0<1$ を満たす $1-\chi^2+\frac{g^2}{16\pi^2}\chi\ln\chi=0$ の解である．

従って，有限なカラー磁場が存在するところで有効ポテンシャルは最小値をもつので，系には安定で非自明な真空 (改良された Savvidy 真空) が存在することがわかる．

4．BRST 不変性を保つ補助場の方法

我々は，有効ポテンシャルの導出過程でユニタリー性を満たすように$k=2$を選んだ．ここでは，系のユニタリー性を明確に保持することで，$k=2$ が選ばれる理由を考察する．実際に系のユニタリー性を明確に保持するために，我々は BRST 不変性を保つ補助場の方法を提案する．

第 2 章で，補助場の因子 Z_2 が導入された．この Z_2 が BRST 不変となるように，補助場の BRST 変換を定義する．いま，$\mathcal{A}_{\mu\nu}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ は BRST 不変ではないことがわかっている，すなわち，$\boldsymbol{\delta}\mathcal{A}_{\mu\nu}\neq 0$, $\boldsymbol{\delta}\mathcal{S}\neq 0$, $\boldsymbol{\delta}\mathcal{U}\neq 0$ である．ただし，BRST 変換 $\boldsymbol{\delta}$ はグラスマン奇である．$\mathcal{A}_{\mu\nu}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ は BRST 不変ではないことから，因子 Z_2 が BRST 不変となるためには $\boldsymbol{\delta}(\mathcal{B}_{\mu\nu}-\mathcal{A}_{\mu\nu})=\boldsymbol{\delta}(\Phi-\mathcal{S})=\boldsymbol{\delta}(\Psi-\mathcal{U})=0$ となる必要があることがわかる．この式を満たすように，補助場の BRST 変換を定義する．このとき，$\boldsymbol{\delta}\mathcal{A}_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{\delta}\mathcal{S}$, $\boldsymbol{\delta}\mathcal{U}$ がフェルミ統計に従うことから，フェルミ統計に従う補助場を導入する．すると，補助場の BRST 変換が定義されて，因子 Z_2 は BRST 不変となる．結果，BRST 不変性を保つ補助場の方法が定式化されて，系のユニタリー性を明確に保持したまま議論を進めることが可能となる．

5．まとめと今後の課題

まず，我々は補助場の方法を用いて，4 次の項の効果を取り入れた有効ポテンシャル (5) を導出した．この有効ポテンシャルを評価することで，有効ポテンシャルに停留値と最小値が存在することを確かめた．この結果，系には安定で非自明な真空 (改良された Savvidy 真空) が存在することがわかった．また，最小値でのカラー磁場と補助場の値は $(H,B_{\mu\nu},\Phi,|\Psi|)=(H_{\min},-2H_{\min}({\delta_\mu}^1{\delta_\nu}^2-{\delta_\nu}^1{\delta_\mu}^2),H_{\min},0)$ と求まる．ただし，$H_{\min}\equiv H_0(1.5,-0.5)$ である．有効ポテンシャルの最小値で補助場 Φ が有限な値をもつことから，安定な真空では質量次元 2 の真空凝縮がおこることが確かめられる．最後に，系のユニタリー性を明確に保持するために BRST 不変性を保つ補助場の方法を提案して，フェルミ統計に従う補助場を導入することでこのことを定式化した．

今後の課題は，BRST 不変性を保つ補助場の方法を用いて $k=2$ が選ばれる理由を考察して，このときの有効ポテンシャルを導出して評価をすることである．

参考文献

[1] G. K. Savvidy, Phys. Lett. **B71**, 133 (1977).

[2] N. K. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B144**, 376 (1978).

[3] K-I. Kondo, Phys. Lett. **B514**, 335 (2001).
F. V. Gubarev and V. I. Zakharov Phys. Lett. **B501**, 28 (2001).