O-32

CIP 法による Burgers 方程式の解法とその評価

CIP Method and Its Effectiveness for Burgers Equations

○石井秀征[1]，長峰康雄[2]，相澤正満[2]
*Hideyuki Ishii[1], Yasuo Nagamine[2] , Masamitsu Aizawa[2]

The numerical problems of advection equations which appear in the physical phenomena like wave propagation case have been studied by using the CIP method. We describe this method briefly, and estimate its effectiveness from numerical point of view by applying this method to the Burgers equations.

１．はじめに

本研究では，線形移流方程式に対して安定高精度な手法として知られる CIP 法を，非線形移流方程式である Burgers 方程式について適用し, その他の近似解法スキームと比較し評価する。

２．Burgers 方程式

関数$u(x,t)$に関して, 次のような方程式を Burgers 方程式と呼ぶ.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

ここで，ν は動粘性係数である．Burgers 方程式は非線形方程式であるが解析解を構成できるので，近似スキームの適用性や有用性を判断することに用いられる．

３．CIP 法

まず(1)式の Burgers 方程式をxに関して微分すると，

$$\frac{\partial(\partial_x u)}{\partial t}+u\frac{\partial(\partial_x u)}{\partial x}=\partial_x\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{2}$$

となる．(1),(2)式の左辺は移流現象を表すが，そこに右辺の項の効果が加わる．すなわち，次のように移流項((3),(4)式）と非移流項((5),(6)式）とに分けて計算を行う．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & (3)\\[2ex] \dfrac{\partial(\partial_x u)}{\partial t}+u\dfrac{\partial(\partial_x u)}{\partial x}=0 & (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (5)\\[2ex] \dfrac{\partial(\partial_x u)}{\partial t}=\partial_x\left(\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & (6)\end{cases}$$

計算手順として，まず移流項を CIP 法で解く．(3)式と(4)式は，微分値$\partial_x u$が元の関数uと同様に伝播することを示している．これより，移流後のプロファイルにさらに微分値という制限を加えることができ，移流前の形に非常に近くなることが期待できる．これが CIP 法の特徴である．

ここで CIP 法を定式化する[1]．計算格子間を

$$F_i(x)=a_i(x-x_i)^3+b_i(x-x_i)^2+c_i(x-x_i)+d_i \tag{7}$$

のように３次補間多項式で表すとき，隣り合う２つの格子点上で与えられた４つの量f_i, f_{i-1}，g_i，g_{i-1}から，以下の関係式を用いて未知数a_i, b_i, c_i, d_iが決定される．ただし，$x=x_i$での値$f(x_i)$をf_i，その微分値$\partial_x f_i$をg_iとしている．

$$\begin{cases}a_i=\dfrac{-2(f_i-f_{i-1})+(g_i+g_{i-1})\varDelta x}{\varDelta x^3}\ ,\\[2ex] b_i=\dfrac{-3(f_i-f_{i-1})-(2g_i+g_{i-1})\varDelta x}{\varDelta x^2}\ ,\\[2ex] c_i=g_i\ ,\ \ d_i=f_i\end{cases} \tag{8}$$

時間発展について考える．元の点f_{i-1}に対して，移流後の点f_iの値は, x_iから１ステップあたりの進行量である$u\varDelta t$だけ戻った値といえる．すなわち，(7)式において$x=x_i-u\varDelta t$を代入すれば，次ステップの値であるf_i^{n+1}を求めることができる．これより，

$$f_i^{n+1}=a_i\xi^3+b_i\xi^2+c_i\xi+d_i \tag{9}$$

と定式化できる．ただし、$\xi=-u\varDelta t$とした．さらに，微分値g_i^{n+1}についても同様にして求まる．

$$g_i^{n+1}=3a_i\xi^2+2b_i\xi+c_i \tag{10}$$

以上(9),(10)式より，CIP 法での近似解が与えられる．

次に、非移流項での計算に移る。ここで，先ほどの時間ステップ n+1 を擬似的な中間の時間ステップ*として置き換える．これにより，移流項と非移流項の 2 段階の計算で 1 ステップとして解析を行う．すなわち，(8),(9)式で求めたf_i^{n+1}をu_i^*，g_i^{n+1}を$\partial_x u_i^*$として数値を渡し，非移流項の計算を行う．非移流項の計算は(5),(6)式をそれぞれ以下のように差分化する．

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^*}{\varDelta t}=\nu\frac{u_{i+1}^*-2u_i^*+u_{i-1}^*}{\varDelta x^2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial_x u_i^{n+1}-\partial_x u_i^*}{\varDelta t}=\partial_x\left(\nu\frac{u_{i+1}^*-2u_i^*+u_{i-1}^*}{\varDelta x^2}\right)-\left(\frac{u_{i+1}^*-u_{i-1}^*}{2\varDelta x}\right)^2 \tag{12}$$

以上(11),(12)式より，u_i^{n+1}と$\partial_x u_i^{n+1}$の値が求まる．この値には移流項と非移流項の効果が含まれている．

１：日大理工・院・量科研　２：日大理工・教員・量科研

４．解析結果

初期関数として，$u^0(x) = \sin \pi x$を与えたときの計算結果を示す．また，初期条件として$\varDelta x = 0.1$，$\varDelta t = 0.1$，$\nu = 10^{-2}$とした．

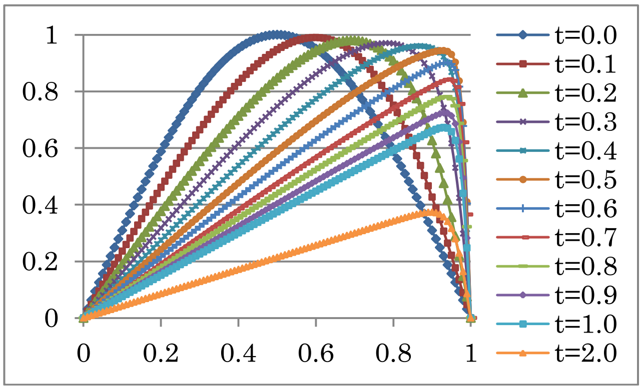

図１．Burgers 方程式の解析解[2]

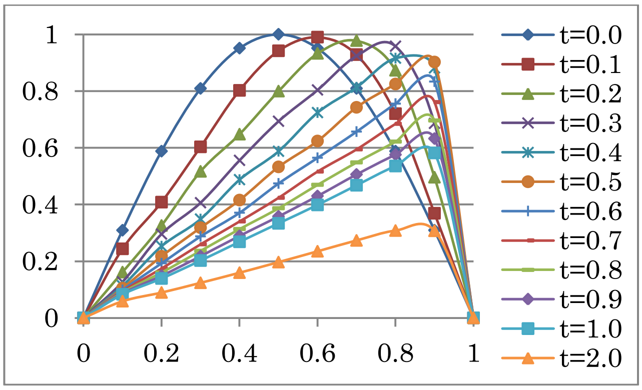

図２．CIP 法による数値解

ここで，誤差について評価する．評価は解析解に対する相対誤差を用いた．

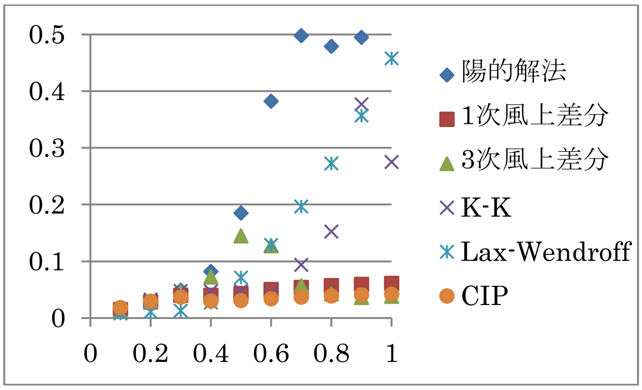

図３．相対誤差の時間変化

衝撃波解の表れ始める t=0.4~0.5付近から，図３に示すように，それぞれの数値解の挙動に変化がみられた．

陽的解法や K-K スキーム，Lax-Wendroff 法などでは特に大きく振動が起き，収束せず肥大化してしまった．３次の風上差分法では，衝撃波解で値が一時不安定となるが，しだいに収束し解析解に近づいていった．

１次の風上差分法と CIP 法は，他に比べて安定した値を保っているようにみえる．そこでこの二つのスキームについてさらに注目するため，図３を拡大したものを図４に示す．

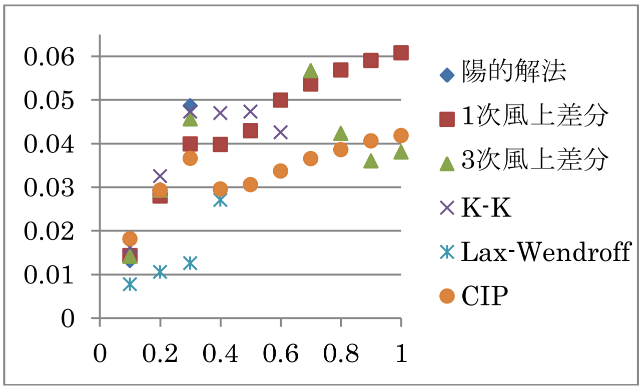

図４．相対誤差の時間変化

図４をみると，はじめの数ステップでは誤差に大きな差は見られないが，t=0.4からは１次風上差分法に比べ，CIP 法は良い精度を保っている．

やはり１次の風上差分法では，波形の変化に対して直線近似での補間による解の拡散が起き，誤差が増加してしまっているものと考えられる．

５．結論と課題

１次元の Burgers 方程式について，風上差分法，Lax-Wendroff 法，CIP 法などによる数値解析を比較・検討した．CIP 法は線形の移流型方程式に対して安定高精度なスキームとして知られているが，非線形である Burgers 方程式にも適用することができた．

また今回の初期値問題に関しては，１次風上差分法と CIP 法が他のスキームに比べて安定した結果を得たが，矩形波の伝播などでは，依然として数値的な振動が起こることが確認されており[4]，この現象を解決することが課題である．

６．参考文献

[1] 矢部孝，尾形陽一，滝沢研二：「CIP 法と JAVA による CG シミュレーション」, 森北出版, pp.51-63, 2003 年.

[2] 登坂宣好，大西和榮：「偏微分方程式の数値シミュレーション」，東京大学出版，pp.219-231，2003 年.

[3] 大宮真弓：「非線形波動の古典解析」，森北出版，pp-85-98，2008 年.

[4] 石井秀征：日本大学理工学部 平成 22 年度学術講演会論文集 O-47.