O-7

5 次元時空に埋め込まれた膨張宇宙モデル

Expanding Universe embedded in 5 dimensional Spacetimes

○針田勇介[1]，岩本弘一[2]
*Yusuke Harita[1], Koichi Iwamoto[2]

Abstract: The brane world scenario has been an attractive candidate for rmodels of the expanding Universe since the Randall and Sundrum (RS) model was proposed. It is assumed that our Universe is a 3-brane (3 referring to the spacial dimensions) floating in a bulk $4+n(n\geq 1)$ dimensional spacetime. Such a higher spacetime dimension is an essential ingredient of the string theory. RS model introduces two 3-branes with a warped extra dimension, in an attempt to solve the hierarchy problem of particle physics. In the cosmological context, brane world has been explored to explain the non-zero cosmological constant and the accelerating Universe. Here we review models of the branes embedded in 5 dimensional spacetimes. Its possible extension to incorporate the dynamics of the Universe will also be discussed.

１． Randall Sundrum モデル

質量の階層性問題を解決する方法の一つに，余剰次元の存在を仮定するというものがある．次元解析にもとづく簡単な考察から，$4+n$次元時空におけるプランク質量M と，4 次元時空におけるプランク質量M_{Pl} のあいだには$M_{Pl}^2 = M^{n+2}V_n$ の関係がある．ここで，V_n は余剰次元の体積である．プランク質量は$M_{Pl} = 2\times 10^{18}$ GeV と大きいが，n がある程度大きいならば, 基本的プランク質量M は電弱スケールにとどまるというアイディアである．Randall & Sundrum は 5 次元の AdS（アンチ・ドジッター）時空の断面を背景時空として，Minkowski 的な 4 次元の膜（ブレーン）を並べ，余剰次元方向の座標に依存するワープ因子を乗じた計量

$$ds^2 = e^{-2kr_c\phi}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \qquad (1)$$

をもつ 5 次元時空を具体的に構成した[1]．ここで，$x_\mu (\mu = 0,1,2,3)$ は膜に接する方向の Minkowski 的座標，$\phi(0\leq\phi\leq\pi)$ は余剰次元方向の座標を表す．r_c は余剰次元の大きさである． $\phi = 0$ と $\phi = \pi$ の位置に大きさが等しく逆符号の張力をもつ２つのブレーンを配置している．5 次元アインシュタイン方程式のエネルギー運動量テンソルとして，バルク 5 次元時空の宇宙項Λ，正負の張力をもつ２つの膜に局在した物質の真空エネルギー（宇宙項）$\pm\lambda$ を考えると，

$\lambda = 24M^3k, \Lambda = -24M^3k^2$ の条件のもとで，式(1)がアインシュタイン方程式の解となる．5 次元重力の作用において，ϕについての積分を行ってしまえば, 4 次元重力の有効作用が求まり，

$$M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k}(1 - e^{-2\pi kr_c})$$

の関係式が得られる．また，バルク 5 次元時空で質量m_0をもつ場は, 3-ブレーン上で $m = e^{-\pi kr_c}m_0$ の有効質量を獲得する．余剰次元のサイズが$kr_c \approx 10$であれば，$e^{\pi kr_c} \approx 10^{15}$ となり，TeV スケールの質量m を，プランクスケールの基本質量スケールm_0に関係付けることが可能になる．

２．Robertson-Walker(RW)ブレーンの 5 次元時空への埋め込み

Randall-Sundrum モデルにおける 3-ブレーンは定常的な Minkowski 計量をもっていた．ブレーンシナリオ

１：日大理工・院（前）・物理，　２：日大理工・教員・物理

を膨張宇宙に適用するためには，一様等方な 3 次元空間と時間からなる Robertson-Walker(RW)的な計量をもつブレーンを 5 次元時空に埋め込まなければならない．空間部分が一様等方な 4 次元時空を 5 次元バルク空間に埋め込む場合，最も一般的な計量は

$$ds^2 = d\phi^2 + f(\phi,t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega\right) - \frac{e^2(\phi,t)}{f(\phi,t)}dt^2$$

と表される[2]．この線素におけるアインシュタイン・テンソルの成分は

$$G^0{}_0 = -\frac{3f''}{2f} + \frac{3k}{f} + \frac{3\dot{f}^2}{4e^2 f}$$

$$G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -\frac{f''}{2f} - \frac{e''}{e} + \frac{k}{f} + \frac{\ddot{f}}{e^2} + \frac{\dot{f}^2}{4e^2 f} - \frac{\dot{e}\dot{f}}{e^3}$$

$$G^5{}_5 = -\frac{3f'e'}{2fe} + \frac{3k}{f} + \frac{3\ddot{f}}{2e^2} + \frac{3\dot{f}^2}{4e^2 f} - \frac{3\dot{e}\dot{f}}{2e^3}$$

$$G^5{}_0 = \frac{3e'\dot{f}}{2e^3} - \frac{3\dot{f}'}{2e^2}$$

となる．ドットは t 微分，プライムは ϕ 微分を表す．

重力源として，5 次元バルク時空の宇宙定数 Λ と 3-ブレーン上の理想流体を考えると，エネルギー運動量テンソルは

$$T^M{}_N = -\Lambda\delta^M{}_N + diag(-\rho, p, p, p, 0)\delta(\phi)$$

となる．アインシュタイン方程式

$$G^M{}_N = \kappa_5{}^2 T^M{}_N$$

にこれらを代入すると，$G^5{}_0 = 0$ より

$$e = A(t)\dot{f}$$

を得る．ここで，$A(t)$ は t の任意の関数である．

$G^0{}_0$ を $-6b^2$ とおくと

$$f'' = \frac{1}{2A^2} + 2k + 4b^2 f$$

となる．これらを積分すると

$$f = -\frac{1}{8A^2b^2} - \frac{k}{2b^2} + \alpha e^{2b|\phi|} + \beta e^{-2b|\phi|}$$

$$e = \frac{\dot{A}}{4A^2b^2} + A\dot{\alpha}e^{2b|\phi|} + A\dot{\beta}e^{-2b|\phi|}$$

が得られる．さらに，$G^5{}_5$ を $-6b^2$ とおくと

$$f'^2 - 4kf - 4b^2 f^2 - \frac{f}{A^2} = B(|\phi|)$$

という式を得る．ここで，$B(|\phi|)$ は $|\phi|$ についての任意の関数であるが，前の f についての方程式とあわせると，B は定数であることが分かる．以上より，最も一般的な解は,

$$\frac{(1+4A^2k)^2}{16A^4} - 16b^4\alpha\beta = b^2 B$$

を満足する時間の関数 $\alpha(t), \beta(t)$ により与えられる[2].

ブレーン上での Israel 接続条件より

$$6b(\beta - \alpha) = f(0,t)\kappa_5{}^2\rho$$

$$12(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = \dot{f}(0,t)\kappa_5{}^2(\rho + 3p)$$

の関係が成り立つ．この 2 式から

$$2f(0,t)\dot{\rho} + 3\dot{f}(0,t)(\rho + p) = 0$$

が導かれる．これは，ブレーン上のエネルギー保存則を表しており，$f(t)$ をスケール因子とみなせば，通常の 4 次元宇宙モデルの場合と同じ形をしている．

３．課題と今後の展望

今後は，具体的な $\alpha(t), \beta(t)$ の例を考えて，解の性質を調べる予定である．また，5 次元バルク時空として AdS 時空を考えた場合にどのような解が可能かを検討したい．

４．参考文献

[1] L.Randall & R.Sundrum, Physical Review Letters, Vol.83, No.17, pp3370-3373, 1999

[2] P.D.Mannheim, Brane-Localized Gravity, World Scientific,2005