

ブレンワールド宇宙論

Cosmology in the Brane World Scenario

○友田洋輔¹, 岩本弘一²*Yosuke Tomoda¹, Koichi Iwamoto²

Abstract: The brane world is a picture in which our Universe is assumed to be a 4-dimensional hypersurface called a ‘brane’ embedded in a higher dimensional spacetime. Such a scenario has been an interesting possibility as an alternative cosmological scenario because of the developments in the string theory. Here we follow the derivation by Shiromizu, Maeda, & Sasaki(2000) of a 4-dimensional Einstein equation from a 5-dimensional Einstein equation, where the latter is considered to be more fundamental, based on the brane world scenario. Possible extensions of the work and its implications on the dynamics of cosmic expansion at inflationary phases are discussed.

1. ブレン (膜) 宇宙

われわれの住む 4 次元宇宙は, 高次元時空中の超曲面であると考え, この超曲面をブレン (膜) 呼ぶ. このような描像のもとに宇宙を考える筋書きを一般にブレンワールド・シナリオと呼ぶ. 明確な定義が存在する超弦理論の D ブレンとは区別されるが, もちろん超弦理論が高次元宇宙モデルを考える精神的支えになっている. 素粒子の階層性問題の解決に余剰次元の可能性を指摘した Arkani-Hamed, Dimopoulos & Dvali (1998)[1], Randall & Sundrum (1999)[2]などの研究を発端として, Shiromizu, Maeda, Sasaki(2000)[3]やその他の研究により, ブレンワールド・シナリオが提唱された. Randall & Sundrum は 5 次元時空中の中に Minkowski 的な 4 次元時空の膜を配置し, 5 次元アインシュタイン方程式の解を具体的に構成した. Shiromizu, Maeda, Sasaki(2000)は 5 次元宇宙におけるアインシュタイン方程式から出発して, 適当な仮定のもとに 4 次元膜 (3 ブレンとよぶ) 上のアインシュタイン方程式を導いている. これらの研究で, ブレン上に余剰次元の効果がどのように現れるかを考察された.

2. ブレン上のアインシュタイン方程式
5 次元のアインシュタイン方程式

$${}^{(5)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(5)}R = \kappa_5^2 T_{\mu\nu} \quad (1)$$

から出発する. ここで, $g_{\mu\nu}$ は 5 次元時空の計量である. ${}^{(5)}R_{\mu\nu}$, ${}^{(5)}R$ は 5 次元のリッチテンソルおよびスカラー曲率を表す. 5 次元計量 $g_{\mu\nu}$ から誘導される 3-ブレン上の計量 $q_{\mu\nu}$ は, ブレンの法線ベクトルを n^μ として, $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$ と表される. このブレン上の計量から, ブレンの曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ やリッチテンソル $R_{\mu\nu}$, スカラー曲率 R が定義される. これら 4 次元ブレン上の曲率テンソルと 5 次元バルク時空の曲率を関係付ける式が, 微分幾何学の Gauss 方程式

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = {}^{(5)}R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + K^\mu{}_\rho K_{\nu\sigma} - K^\mu{}_\sigma K_{\nu\rho} \quad (2)$$

および Codazzi 方程式

$$D_a K_{bc} - D_b K_{ac} = q^\mu{}_a q^\nu{}_b q^\rho{}_c R_{\alpha\mu\nu\rho} n^\sigma \quad (3)$$

である. ここで, $K_{\mu\nu}$ は $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}L_n q_{\mu\nu}$ で定義される外的曲率, L_n は n^μ 方向の Lie 微分を表す.

(1) 式において μ, ρ 添え字を縮約して

$$G_{\mu\nu} = \left({}^{(5)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^{(5)}R \right) + {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu} (K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - \tilde{E}_{\mu\nu}$$

を得る. ここで

$$\tilde{E}_{\mu\nu} = {}^{(5)}R^\alpha{}_{\beta\rho\sigma} n_\alpha n^\rho q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\sigma$$

である. これらを(1)式の 5 次元アインシュタイン方程式に代入し, エネルギー運動量テンソルとして

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\Lambda g_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \delta(\chi) \\ S_{\mu\nu} &= -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

を仮定すると, 4 次元アインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned} \Lambda_4 &= \frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(\Lambda + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \lambda^2 \right) \\ G &= \frac{\kappa_5^4 \lambda}{48\pi} \end{aligned} \quad (5)$$

である. また, $E_{\mu\nu}$ は 5 次元 Weyl テンソル $C^\alpha{}_{\beta\rho\sigma}$ を

用いて $E_{\mu\nu} = C^\alpha{}_{\beta\rho\sigma} n_\alpha n^\rho q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\sigma$ で定義されるテン

ソルである. $\pi_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} \tau_{\mu\alpha} \tau_\nu{}^\alpha + \frac{1}{12} \tau \tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8} q_{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{24} q_{\mu\nu} \tau^2 \end{aligned}$$

である[3]. χ は余剰次元方向の座標で, ブレーンに垂直な方向を向いているとしている, (4)式に現れるデルタ関数は $\chi = 0$ にブレーンが静止していることを示している. ブレーンを横切るときの計量と外的曲率のとは Israel の接続条件

$$\begin{aligned} [q_{\mu\nu}]_{-0}^{+0} &= 0 \\ [K_{\mu\nu}]_{-0}^{+0} &= -\kappa_5^2 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \right) \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる. 4 次元アインシュタイン方程式の導出

には, この接続条件と $\chi = 0$ の両側における対称性が使われている. (5)式から分かるように, 重力定数が真空のエネルギー λ に依存している.

Shiromizu et al. [3]は $\pi_{\mu\nu}$ や $E_{\mu\nu}$ がもたらす高次元時空の効果について議論をしている.

3. 課題と今後の展望

以上, 原論文に沿ってブレーンが静止している場合の導出を見てきたが, 今後, χ 方向 (余剰次元の方向) にブレーンが動く場合を考察したい.

このシナリオにもとづけば, 相転移で真空のエネルギーが変化すると重力定数が変化するということになる. このことが初期宇宙のインフレーション期の宇宙膨張のダイナミクスに与える影響なども考察したい.

5 次元時空が AdS 時空の場合, Randall & Sundrum の解が得られるはずである. Randall & Sundrum モデルのように複数のブレーンを配置するような解が存在するかどうか調べ, できれば具体的な解を構成してみたい.

4. 参考文献

- [1] N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos, G.Dvali, Phys.Lett.B, Vol.429, 263, 1998
- [2] L.Randall & R.Sundrum, Physical Review Letters, Vol.83, 3370, 1999
- [3] T.Shiromizu, K.Maeda, M.Sasaki, Physical Review D, Vol.62, 024012, 20