P−10

代数的数の 2 進展開について

On the binary expansions of algebraic numbers

○金子 元 (Kaneko Hajime)[1]

概 要

Borel [3] conjectured that all algebraic irrational numbers are normal. Bugeaud [4] introduced the number of digit changes to study the base-b expansions of algebraic irrational numbers. We give lower bounds of the number of digit changes in the case of $b = 2$.

1　導入

2 進記数法では, 非負実数が 0,1 という 2 種類の digit を用いて記述される. 2 進展開における正規数とは, この digit である 0,1 が均等であるような展開をもつ非負実数のことである. Borel[2] はほとんどすべての非負実数が 2 進展開において正規数であることを示した.

また,Borel[3] はすべての代数的無理数が 2 進展開に関して正規数であると予想した. ところが,Borel のこの予想は未解決であり, また, 予想に関する反例も知られていない. 例えば,$\sqrt{2}$ の 2 進展開において,digit の中で,0 が占める割合がどれくらいかについてもほとんど知られていない.

2　正規数

まずは, 正規数の定義について, 詳細を述べるために記号を導入する. ξ を非負の実数とする. このとき,ξ の 2 進展開を

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(\xi) 2^{-n}$$

と書くことにする. ただし,$t_0(\xi) = [\xi]$ は ξ の整数部分であり, 正の整数 n に対して $t_n(\xi) \in \{0, 1\}$ である. また,ξ の 2 進展開には無限に多くの 0 があるとする. すなわち,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot 2^{-n}$$

のような記法を用いないこととする. さて,$w_1, \ldots, w_L \in \{0, 1\}$ に対して, これらを並べたもの $w_1 \ldots w_L$ を長さ L のワードと呼ぶことにする. 例えば,11 は長さ 2 のワードである. さて, 非負実数 ξ, 長さ L のワード $w_1 \ldots w_L$, 及び整数 $N \geq L$ に対して,

$$f(\xi, w_1 \ldots w_L; N) := \mathrm{Card}\{n \leq N \mid t_n(\xi)t_{n+1}(\xi) \ldots t_{n+L-1}(\xi) = w_1 w_2 \ldots w_L\}$$

とおく. ただし,Card は集合の濃度を表す. ξ が 2 進展開に関して正規数であるとは, 任意の正整数 L 及び任意の長さ L のワード $w_1 \ldots w_L$ に対して,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{f(\xi, w_1 \ldots w_L; N)}{N} = 2^{-L}$$

が成り立つことである.

[1]日大理工・研究生・数学

3　digit 変化数

b を 2 以上の整数とする．Bugeaud [4] は代数的無理数が正規数であるかどうかを調べるために, b 進展開における digit 変化数を調べた．代数的無理数の digit 変化の下からの評価を与えることは, その数が正規数であることの一つの証拠となるためである．ここでは,$b=2$ である場合について,digit 変化数の下からの評価を述べる．さて,2 進展開について前節の記法を用いることにする．digit 変化数 $\gamma(\xi;N)$ は

$$\gamma(\xi;N)=\mathrm{Card}\{n\leq N\mid t_n(\xi)\neq t_{n-1}(\xi)\}$$

で与えられる．もし,Borel の予想が正しく, 代数的無理数 ξ が正規数であるならば,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\gamma(\xi;N)}{N}=\frac{1}{2}$$

が成り立つ．Bugeaud と Evertse[5] は,ξ が次数 D の代数的無理数であるとき, 十分大きなすべての整数 N に対して, 以下の不等式が成り立つことを示した．

$$\gamma(\xi;N)\geq C\frac{(\log N)^{3/2}}{(\log 6D)^{1/2}(\log\log N)^{1/2}}$$

ただし,C は計算可能な絶対定数である．

著者は,ξ の最小多項式がある仮定を満たすときに Bugeaud と Evertse の評価式を改良した．

Theorem 3.1 ξ を非負の代数的無理数とする．ξ の次数は D であり, また, 最小多項式は $A_DX^D+A_{D-1}X^{D-1}+\cdots+A_0\in\mathbb{Z}[X]$ であるとする．ここで, 奇素数 p が存在して, 以下を満たすと仮定する: p は $A_D,A_{D-1}\ldots,A_1$ を割り切るが, A_0 を割り切らない．すると,ξ のみに依存する計算可能な定数 $C'(\xi)$ が存在して, 十分大きなすべての整数 N に対して

$$\gamma(\xi;N)\geq C'(\xi)N^{1/D}$$

が成り立つ．

さて, 定理 3.1 の数値例を挙げる．$\xi_0=1/\sqrt{3}$ の最小多項式は $3X^2-1=A_2X^2+A_1X+A_0$ である．よって素数 3 が定理 3.1 の仮定を満たす. 実際, 3 は A_2 及び A_1 を割り切るが, A_0 を割り切らない. さて,ε を 1 より小さい任意の正の実数とする. このとき,ε のみに依存する計算可能な正定数 $C''(\varepsilon)$ が存在して, 以下を満たす：$C''(\varepsilon)$ より大きい任意の整数 N に対して,

$$\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{3}};N\right)\geq\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{N}.$$

参考文献

[1] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall & C. Pomerance: *“On the binary expansions of algebraic numbers”*, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, Vol. 16, pp.487–518, 2004.

[2] É. Borel: *“Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques”*, *Rend. circ. Mat. Palermo*, Vol. 27, pp247–271, 1909.

[3] É. Borel: *“Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne”*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 230, pp591–593, 1950.

[4] Y. Bugeaud: *“On the b-ary expansion of an algebraic number”*, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, Vol. 118, pp217–233, 2007.

[5] Y. Bugeaud & J. -H. Evertse: *“On two notions of complexity of algebraic numbers”*, *Acta Arith.* Vol. 133, pp221–250, 2008.

[6] H. Kaneko, *“On the binary digits of algebraic numbers”*: *J. Aust. Math. Soc.*, Vol. 89, pp233-244, 2010.