P-11

鈴木群について
On the Suzuki group

○小久保雄介[1], 高尾昂[1], 中田悠嗣[1], 佐々木隆二[2]
Yusuke Kokubo[1] , Takashi Takao[1] , Yuji Nakata[1] , Ryuji Sasaki[2]

Abstract

In this talk, we give an explicit description of the Suzuki group of Lie type.

1　初めに

或る性質を持つ二重可移群の特徴づけの研究から、鈴木による新単純群の発見は、画期的であった. この講演では, 鈴木群の定義を明白に記述することを目的とする.

2　非退化斜交形式と斜交群

V を体 F 上の有限次元の線形空間とする. 写像

$$f : V \times V \longrightarrow F$$

が次を満たすとき, f を非退化斜交形式という:

1. $f(ax+by,z) = af(x,z)+bf(y,z)$,
2. $f(x,ay+bz) = af(x,y)+bf(x,z)$,
3. $f(x,x) = 0$,
4. $f(x,V) = 0 \Rightarrow x = 0$.

$GL(V)$ の部分群

$$Sp(V) = Sp(V,f) = \{g \in GL(V) | f(g(u),g(v)) = f(u,v)\}$$

を (V,f) の斜交群という.

3　鈴木群

定義

$q = 2^{2n+1}$ とし, W を $\mathbb{F}_q$ 上の 4 次元線形空間とし,

$$f : W \times W \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

を非退化斜交形式とし,

$$\mathcal{S} = \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$$

を W の斜交基底とする. 即ち, f の $\mathcal{S}$ に関する表現行列

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda_2 W = \langle e_1\wedge e_2, e_1\wedge f_1, e_1\wedge f_2, e_2\wedge f_1, e_2\wedge f_2, f_1\wedge f_2\rangle$$

を W の 2 次の外積空間とする.

$$F(a\wedge b, c\wedge d) = \begin{cases} 1 & \langle a,b,c,d\rangle = W \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

と定めると, F は, $\Lambda_2 W$ 上の非退化斜交形式である. $\phi \in Sp(W)$ に対し, $\Lambda_2\phi \in Sp(\Lambda_2 W)$. $v_1 = e_1\wedge e_2 + f_1\wedge f_2$ は, $Sp(W)$ 不変であり, 4 次元空間 $W^* := v_1^{\perp}/\langle v_1\rangle$ に, $\mathrm{Sp}(W)$ は作用する. F は, W^* に非退化斜交形式を導き,

$$\{e_1^* = e_1\wedge e_2,\ e_2^* = e_1\wedge f_2,\ f_1^* = f_1\wedge f_2,\ f_2^* = e_2\wedge f_1\}$$

が, W^* の斜交基底となる.

$\sigma \in Sp(W)$ が導く $Sp(W^*)$ の元を σ^* と表す. 同型写像

$$\phi : W \longrightarrow W^*, \quad w \longmapsto w^*$$

は自己同型写像

$$Sp(W) \longrightarrow Sp(W), \quad \sigma \longmapsto \phi\sigma^*\phi^{-1}$$

を導く. 混乱が生じない限り,$\phi\sigma^*\phi^{-1}$ を再び σ^* と表す.

生成元

$q = 2^{2n+1}$ とする $\mathbb{F}_q$ 上の 4 次元非退化斜交空間 (W,f) の基底を,Suzuki[1] に従って, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, f_2, f_1)$ とする. 従って, 斜交形式 f の行列は

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in GL_4(q) \simeq GL(W)$$

に対し,

$$A \in Sp_4(q) \Longleftrightarrow At\,{}^t\!A = t$$

[1]日大理工・院（前）・数学
[2]日大理工・教員・数学

この条件は, 次と同値である:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{44} & a_{34} & a_{24} & a_{14} \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{42} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$A \in Sp_4(W)$ が導く $A^* \in GL(W^*)$ を求めよう.

$$\phi = \phi_A : W \longrightarrow W$$

に対し,

$$\begin{pmatrix} e_1^{\phi} \\ e_2^{\phi} \\ e_3^{\phi} \\ e_4^{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, A^{-1} を用いて次を得る:

$$v_1 := e_1' \wedge f_1' + e_2' \wedge f_2' = e_1 \wedge f_1 + e_2 \wedge f_2$$

$$\begin{aligned} e_1' \wedge e_2' &= (a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})e_1 \wedge e_2 \\ &\quad +(a_{11}a_{23}+a_{21}a_{13})e_1 \wedge f_2 \\ &\quad +(a_{11}a_{24}+a_{21}a_{14})e_1 \wedge f_1 \\ &\quad +(a_{12}a_{23}+a_{22}a_{13})e_2 \wedge f_2 \\ &\quad +(a_{12}a_{24}+a_{22}a_{14})e_2 \wedge f_1 \\ &\quad +(a_{13}a_{24}+a_{23}a_{14})f_1 \wedge f_2 \end{aligned}$$

等を得る.

ここで、A^{-1} の公式から得られる次の等式を用いた.

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12} &= a_{12}a_{23}+a_{22}a_{13} \\ a_{11}a_{34}+a_{31}a_{14} &= a_{12}a_{33}+a_{32}a_{13} \\ a_{21}a_{44}+a_{41}a_{24} &= a_{22}a_{43}+a_{42}a_{23} \\ a_{41}a_{33}+a_{31}a_{44} &= a_{42}a_{33}+a_{32}a_{43} \end{aligned} .$$

従って,

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & a_{14}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & a_{24}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* & a_{34}^* \\ a_{41}^* & a_{42}^* & a_{43}^* & a_{44}^* \end{pmatrix}$$

$a_{11}^* = a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12}, a_{12}^* = a_{11}a_{23}+a_{21}a_{13}$,
$a_{13}^* = a_{12}a_{24}+a_{22}a_{14}, a_{14}^* = a_{13}a_{24}+a_{23}a_{14}$,
$a_{21}^* = a_{11}a_{32}+a_{31}a_{12}, a_{22}^* = a_{11}a_{33}+a_{31}a_{13}$,
$a_{23}^* = a_{12}a_{34}+a_{32}a_{14}, a_{24}^* = a_{13}a_{34}+a_{33}a_{14}$,
$a_{31}^* = a_{12}a_{23}+a_{22}a_{13}, a_{32}^* = a_{21}a_{43}+a_{41}a_{23}$,
$a_{33}^* = a_{22}a_{44}+a_{42}a_{24}, a_{34}^* = a_{23}a_{44}+a_{43}a_{24}$,
$a_{41}^* = a_{41}a_{32}+a_{31}a_{42}, a_{42}^* = a_{41}a_{33}+a_{31}a_{43}$,
$a_{43}^* = a_{42}a_{34}+a_{32}a_{44}, a_{44}^* = a_{43}a_{34}+a_{33}a_{44}$.

A^* に対し, 同様に, A^{**} を求めよう.

$$\begin{aligned} a_{11}^{**} &= a_{11}^*a_{22}^* + a_{21}^*a_{12}^* \\ &= (a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33}+a_{31}a_{13}) \\ &\quad +(a_{11}a_{32}+a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23}+a_{21}a_{13}) \\ &= a_{11}^2(a_{22}a_{33}+a_{23}a_{32}) + a_{11}(a_{22}a_{31}a_{13} \\ &\quad +a_{21}a_{12}a_{33}+a_{23}a_{31}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}) \\ &= a_{11}^2 + a_{11}^2(a_{21}a_{34}+a_{24}a_{31}) + a_{11}(a_{22}a_{31}a_{13} \\ &\quad +a_{21}a_{12}a_{33}+a_{23}a_{31}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}) \\ &= a_{11}^2 + a_{11}(a_{21}(a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32}+a_{14}a_{31}) \\ &\quad +a_{31}(a_{12}a_{23}+a_{13}a_{22}+a_{14}a_{21})) \\ &\quad +a_{11}(a_{22}a_{31}a_{13}+a_{21}a_{12}a_{33} \\ &\quad +a_{23}a_{31}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}) \\ &= a_{11}^2 \end{aligned}$$

ここで,

$$A^* \in Sp_4(q) \Longleftrightarrow A^* t\, {}^t\!A^* = t$$

の条件を使えば,

$$A^{**}=\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & a_{34}^2 \\ a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & a_{44}^2 \end{pmatrix}$$

を得る. 従って, $q = 2^{2n+1}$ とおいたので,

$$A^{**} = A^{\sigma^{2n+2}} \qquad (A \in Sp_4(\mathbb{F}_q))$$

であり,

$$(* \circ \sigma^n)^2 = id.$$

そこで, $Sp_4(q)$ の部分群として, 鈴木群を次のように定義する.

定義

$$\begin{aligned} Sz(q) &= \{A \in Sp_4(q) \mid A^{*\circ\sigma^n} = A\} \\ &= \{A \in Sp_4(q) \mid A^{\sigma^{n+1}} = A^*\} \end{aligned}$$

と定め, **鈴木群**という.

参考文献

[1] Michio Suzuki, *On a class of doubly transitive groups*, The annals of Mathematics, Second Series, Vol.75, No.1, pp.105-145, 1962.

[2] R. A. Wilson, *The finite simple groups*, Graduate Texts in Mathematics, 2009.

[3] 佐々木隆二, 講義ノート, 日本大学理工学部数学科,2011.

[4] 鈴木通夫, 群論上，群論下, 岩波，1977, 1978.