P-12

鈴木群の単純性
Simpleness of the Suzuki group

○中田悠嗣[1]，小久保雄介[1]，高尾昂[1]，佐々木隆二[2]
Yuji Nakata[1], Yusuke Kokubo[1], Takashi Takao[1], Ryuji Sasaki[2]

Abstract

After we recall the definition of the Suzuki groups of Lie type, we discuss fundamental properties of the Suzuki groups. Moreover, we show that the Suzuki groups are simple.

1 Introduction

私達は (ZT)-group の構造について研究を進めている．ここでは，鈴木群の単純性について述べる．

2 鈴木群

$q = 2^{2n+1}$ とする．W を体 $\mathbb{F}_q$ 上の 4 次元線形空間とし，

$$f : W \times W \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

を非退化斜交形式とする．$\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ を W の斜交基底とする．

定義 1 (斜交群)

$$Sp_4(q) = \{A \in GL_4(q) \mid At\,{}^t\!A = t\}$$

と定め，斜交群という．但し，

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定義 2 (鈴木群)

$$Sz(q) = \{A \in Sp_4(q) \mid A^{\sigma^{n+1}} = A^*\}$$

と定め，鈴木群という．但し，

$$\sigma : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q \ (a \mapsto a^2), \mid \sigma \mid = 2n+1$$

$A \in Sp_4(q)$ に対して、

$$A^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & a^*_{14} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} & a^*_{24} \\ a^*_{31} & a^*_{32} & a^*_{33} & a^*_{34} \\ a^*_{41} & a^*_{42} & a^*_{43} & a^*_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
a^*_{11} &= a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}, a^*_{12} = a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}, \\
a^*_{13} &= a_{12}a_{24} + a_{22}a_{14}, a^*_{14} = a_{13}a_{24} + a_{23}a_{14}, \\
a^*_{21} &= a_{11}a_{32} + a_{31}a_{12}, a^*_{22} = a_{11}a_{33} + a_{31}a_{13}, \\
a^*_{23} &= a_{12}a_{34} + a_{32}a_{14}, a^*_{24} = a_{13}a_{34} + a_{33}a_{14}, \\
a^*_{31} &= a_{21}a_{42} + a_{41}a_{22}, a^*_{32} = a_{21}a_{43} + a_{41}a_{23}, \\
a^*_{33} &= a_{22}a_{44} + a_{42}a_{24}, a^*_{34} = a_{23}a_{44} + a_{43}a_{24}, \\
a^*_{41} &= a_{41}a_{32} + a_{31}a_{42}, a^*_{42} = a_{41}a_{33} + a_{31}a_{43}, \\
a^*_{43} &= a_{42}a_{34} + a_{32}a_{44}, a^*_{44} = a_{43}a_{34} + a_{33}a_{44}.
\end{aligned}$$

但し，A^* の詳細については [4] 参照

補題 1

$$Q := \{\text{ 単位下三角行列 }\} \cap Sz(q)$$

このとき，

$$Q = \{T(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{F}_q\}$$

が成り立つ．但し，$\tau = \sigma^{n+1}$,

$$T(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta + \alpha^{\tau+1} & \alpha^\tau & 1 & 0 \\ \alpha\beta + \beta^\tau + \alpha^{\tau+2} & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

補題 2
(1) $T(x,y)T(u,v) = T(x+u, y+v+xu^\tau)$
(2) $T(x,y)^{-1} = T(x, y + x^{\tau+1})$
(3) $[T(a,b), T(c,d)] = T(0, ac^\tau + ca^\tau)$

補題 3
$Sz(q)$ は W の一次元部分空間の集合に作用する．

補題 4

$$H := \{\text{ 下三角行列 }\} \cap Sz(q),$$
$$Sz(q)_{\langle e_1\rangle} := \{A \in Sz(q) \mid \langle e_1^A\rangle = \langle e_1\rangle\}$$

このとき，

$$H = Sz(q)_{\langle e_1\rangle}$$

が成り立つ．

補題 5
$\mathcal{O} : \langle e_1\rangle$ の $Sz(q)-$ 軌道とすると，

$$\mathcal{O} = \{\langle e_1\rangle\} \cup \mathcal{F}$$
$$\mathcal{F} = \cup_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q}\{\langle f_1 + \lambda f_2 + \mu e_2 + (\lambda\mu + \mu^\tau + \lambda^{\tau+2})e_1\rangle\}$$

さらに，H は $\mathcal{F}$ 上可移である．従って，$Sz(q)$ は $\mathcal{O}$ 上二重可移である．

補題 6
$q > 2$ ならば，$Sz(q)$ の位数 2 の元の共役類は唯一であり，位数 2 の元が $Sz(q)$ を生成する．

[1]日大理工・院 (前)・数学
[2]日大理工・教員・数学

定義 3　(原始的)
集合 X 上の可移置換群 G に対して，

$$\exists \Delta \subseteq X \ s.t. \begin{cases} (1)\ \Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset \Rightarrow \Delta = \Delta^g \quad (g \in G) \\ (2)\ 1 < |\,\Delta\,| < |\,X\,| \end{cases}$$

が満たされるとき，その可移置換群は**原始的でない**といい，そのような部分集合 Δ が存在しないとき，**原始的**という．

補題 7
G : 群, X : 集合, $x \in X, G : X$ 上可移 のとき，

$$G : X \text{ 上原始的ならば，} G_x : G \text{ の極大部分群}$$

補題 8　(岩澤)
(G, Ω) を原始置換群とする．
(1) G_α $(\alpha \in \Omega)$ の可換正規部分群 A が存在し，
$G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$ を満たす．
(2) $G = G' := [G, G]$
を満たすならば，G は単純群である．

(証明)
$1 < N \trianglelefteq G$ とする．
$G_\Omega = \{g \in G \mid g\omega = \omega, \forall \omega \in \Omega\}$ とする．
(G, Ω):原始置換群より，G は Ω 上可移である．

$$\therefore\ \forall \beta \in \Omega, \exists g \in G \ s.t.\ \beta = \alpha^g$$

$N \leq G_\alpha$ ならば，

$$\begin{aligned} G_\beta &= G_{\alpha^g} && (\because \beta = \alpha^g) \\ &= (G_\alpha)^g \\ &\geq N^g && (\because N \leq G_\alpha) \\ &= N && (\because N \trianglelefteq G) \end{aligned}$$

$$\therefore\ N \leq G_\alpha \cap G_\beta$$

ここで，β は任意なので，$N \leq G_\Omega$ であり，$N = 1$ となり，不合理．

$$\therefore\ N \not\leq G_\alpha$$

$G : \Omega$ 上原始的なので，補題 7 より，$G_\alpha : G$ の極大部分群である．また，$G_\alpha \leq G_\alpha N \leq G$ が成り立つ．G_α : 極大より，

$$G_\alpha = G_\alpha N \ or\ G_\alpha N = G$$

$G_\alpha = G_\alpha N$ とすると，$N \leq G_\alpha$ となり，不合理．

$$\therefore\ G_\alpha N = G$$

$G_\alpha N = G$ より，

$$\forall g \in G \text{ に対して，} \exists g_0 \in G_\alpha, \exists n \in N \ s.t.\ g = g_0 n$$

$$\begin{aligned} A^g &= A^{g_0 n} \\ &= (A^{g_0})^n \\ &= A^n && (\because A \text{ は } G_\alpha \text{ の可換正規部分群}) \\ &\in NA \end{aligned}$$

$A^g \in NA$ より，$G \subseteq NA$
$N, A \subseteq G$ より，$NA \subseteq G$ であり，$G = NA$

$$\begin{aligned} G/N &= NA/N && (\because G = NA) \\ &\simeq A/N \cap A && (\because \text{第 2 同型定理}) \\ &\leq A \end{aligned}$$

A : 可換群より，G/N : 可換群であり，$G' \leq N$ が成り立つ．

$$\therefore\ G' \leq N \leq G \text{ であり，仮定 (2) より，} G = N$$

$$\therefore\ G\text{:単純群}$$

定理 1
$Sz(q)$ は $q > 2$ ならば，単純群である．

(証明)
補題 5 より，$Sz(q)$ は $\mathcal{O}$ 上二重可移なので，原始的である．

$$Q_1 := Z(Q) = \{T(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{F}_q\}$$

であり，Q_1 は H の可換正規部分群である．補題 2(3) より，

$$[T(a, b), T(c, d)] = T(0, ac^\tau + ca^\tau) \in Q_1$$

であり，

$$|\,T(0, ac^\tau + ca^\tau)\,| = 2$$

補題 6 より，$Sz(q)'$ は位数 2 の元を含むので，その共役類を全て含む．また，$Sz(q)$ は位数 2 の元で生成されるので，

$$Sz(q)' = Sz(q)$$

であり，補題 8 より，$Sz(q)$:単純群である．

定義 4　((ZT)-group)
G : 群, X : 集合, $|\,X\,| = N + 1$
(1) $G : X$ 上二重可移．
(2) X の 3 点を固定する G の元は単位元である．
(3) G は位数 $N + 1$ の正規部分群を含まない．
(4) $|\,N\,|$: 偶数．
を満たすとき，G を **(ZT)-group** という．

参考文献

[1] W. Feit, *On a class of doubly transitive permutation groups*, Illinois Journal of Mathematics, pp.170-186, 1960.

[2] Michio Suzuki, *On a class of doubly transitive groups*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol.75, No.1, pp.105-145, 1962.

[3] R. A. Wilson, *The finite simple groups*, Graduate Texts in Mathematics, 2009.

[4] 小久保雄介, 高尾昂，中田悠嗣，佐々木隆二，鈴木群について, 日本大学理工学部学術講演会，2011.

[5] 佐々木隆二， 講義ノート, 日本大学理工学部数学科，2011.

[6] 鈴木通夫, 群論上，群論下, 岩波，1977, 1978.