P-13

$G_2(q)$ の位数

○高尾　昂[1]，小久保　雄介[1]，中田　悠嗣[1]，佐々木　隆二[2]
Takashi Takao[1]，Yusuke Kokubo[1]，Yuji Nakata[1]，Ryuji Sasaki[2]

Abstract

In this article, we recall definitions of quaternions and octonions over a field F of characteristc $\neq 2$, and discuss the automorphism group $G_2(F)$ of the octonion algebra. Moreover, we determine the order of $G_2(F)$ if the field F is the finite field of q elements.

1 Quaternions

F を標数が 2 と異なる体とする.

Def 1.1 (Quaternion) $1, i, j, k$ を基底とする F 上の線形空間を $\mathbb{H}$ と表わす.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$$

により, 積を定めると, $\mathbb{H}$ は, 斜体をなす. $\mathbb{H}$ を **ハミルトン四元環** といい, $\mathbb{H}$ の元を **四元数** という.

Def 1.2
四元数 $q = a + bi + cj + dk$ に対し

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$ を q の**共役**
$Re(q) = a = \frac{1}{2}(q + \bar{q})$ を q の**実部**
$N(q) = q\bar{q}$を q の**ノルム**
$a = 0$ のとき, q を**純虚四元数**

と呼ぶ.

四元数環 $\mathbb{H}$ の自己同型群を
$Aut(\mathbb{H}) = \{f \in Aut_{\mathbb{R}-linear}(\mathbb{H}) \mid f(xy) = f(x)f(y), f(1) = 1\}$
により定義する.

Lem 1.3 $f \in Aut(\mathbb{H})$ とする.

(1) x が純虚数ならば, $f(x)$ も純虚数.
(2) $f(q)$ の実部と, q の実部は等しい.
(3) $f(\bar{q}) = f(\bar{q})$
(4) $N(f(q)) = N(q)$

2 Octonions

Def 2.1 (Octonion) $1, i_0, i_1, \cdots, i_6$ を基底とする F 上の線形空間を $\mathbb{O}$ によって表し，ここで，任意の $t(t \equiv 0 \bmod 7)$ に対し,i_t,i_{t+1},i_{t+3} が，四元数の i, j, k と同じ積の法則を満たす様にすることにより , $\mathbb{O}$ に積をを定めることが出来る．こうして得られた代数 $\mathbb{O}$ を, **八元数代数** といい, その元を **八元数** という.

[1]日大理工・院 (前)・数学
[2]日大理工・教員・数学

$\mathbb{H}$ は斜体を成していたが, $\mathbb{O}$ は, 乗法において結合法則を満たさない.
しかし，$\{\pm1, \pm i_0, \ldots, \pm i_6\}$ は群ではないが,*Moufang loop* をなす.

loop とは演算が定義された集合 L で, $a \in L$ による左右の積で L の置換となっており, 単位元を持つ集合のことで,*Moufang laws* を満たす L を *Moufang loop* という.

Def 2.2 (*Moufang laws*) L:*loop* とし,

$$\begin{aligned}&(xy)(zx) = (x(yz))x \quad (x, y, z \in L)\\&x(y(xz)) = ((xy)x)z\\&((yx)z)x = y(x(zx))\end{aligned}$$

を満たす.
さらに,*loop* が 1 を含むことから特に

$$\begin{aligned}(xy)x &= x(yx)\\x(xy) &= (xx)y\\(yx)x &= y(xx)\end{aligned}$$

が得られ, これを ***alternative laws*** と呼ぶ.

また,(1.2) で定義したことと同様のことが八元数でも定義できる. しかし, 四元数では容易に $N(xy) = N(x)N(y)$ を示すことができるが, 八元数ではそうではない. そのために,*alternative laws* , $\bar{x} = 2Re(x) - x$, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ でこれを示す. 右辺の変形を先に行うが, 左辺のそれは同様なので結果のみとする.

Prop 2.3 $x, y \in \mathbb{O}$ に対し $N(xy) = N(x)N(y)$
Ploof.

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= (x\bar{x})(y\bar{y})\\&= (2Re(x)x - x^2)(y\bar{y})\\&= 2Re(x)x(y\bar{y}) - x^2(y\bar{y})\\&= 2Re(x)x(y\bar{y}) - N(y)x^2\\(\text{左辺}) &= 2Re(x)(xy)\bar{y} - N(y)x^2\end{aligned}$$

これより $x(y\bar{y}) = (xy)\bar{y}$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
(xy)\bar{y} &= (xy)(2Re(y) - y) \\
&= x(2Re(y)y) - (xy)y \\
&= x(2Re(y)y) - x(yy)\ (\because \textit{alternative laws}) \\
&= x(y(2Re(y) - y)) \\
&= x(y\bar{y})
\end{aligned}$$

$$\therefore N(xy) = N(x)N(y).$$

N は二次形式で, 半双線形形式は

$$f(x,y) = N(x+y) - N(x) - N(y) = 2Re(x\bar{y})$$

となる.
これにより, 1 と純虚八元数 u に対し,

$$f(1,u) = 2Re(1\bar{u}) = 0$$

なので,

$$1^{\perp} = \{\text{ 純虚八元数 }\}$$

となる.
八元数の自己同型写像 σ は 1 を固定するので, その直交補空間も固定する. σ は純虚八元数に作用する直交群 $GO_7(F)$ があるが, 実際は $SO_7(F)$ である. i_0, i_1 の像が決まれば i_3 の像が決まり, i_2 の像が決まればすべての基底の像も決まる.

この自己同型群は $G_2(F)$ として知られており, F が $\mathbb{F}_q$ 体であるとき, これを $G_2(q)$ という.

3　$G_2(q)$ の位数

q:奇数冪の場合の位数を調べる. これは, 八元数の生成元 i_0, i_1, i_2 の $G_2(q)$ における像の数を計算し求められる. 生成元の組を (i_0, i_1, i_2) とし, これらをノルムが 1 の互いに直交した純虚八元数で,i_2 は $i_0 i_1$ に直交している. ここで $\{1, i, j, ij = k, l, il, jl, kl\}$ は正規直交基底となり,$G_2(q)$ は生成元 (i,j,l) に正則に作用する.

Lem 3.1 $SO_7(F)$ は $\{i \mid N(i) = 1, i : \text{純虚八元数}\}$ に可移に作用する.
また, $SO_7(F) \ni A$ に対し,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A' \end{pmatrix}$$

とおけば, $A' \in SO_6^{\varepsilon}(F)(\varepsilon = \pm 1, \varepsilon \equiv q \bmod 4)$ となる.
よって, $SO_6^{\varepsilon}(F)$ は $SO_7(F)$ の安定化部分群となる.
すると i_0 の取り方は

$$\mid SO_7(F) \mid / \mid SO_6^{\varepsilon}(F) \mid = q^3(q^3 + \varepsilon).$$

次に, i_1 の取り方は上と同様にして

$$\mid SO_6^{\varepsilon}(F) \mid / \mid SO_5(F) \mid = q^2(q^3 - \varepsilon).$$

最後に i_0, i_1, i_3 に直交する純虚八元数の取り方は

$$\mid SO_4^{+}(F) \mid / \mid SO_3(F) \mid = q(q^2 - 1).$$

Lem 3.2

$$\mid G_2(q) \mid = q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1).$$

Ploof. $G_2(q)$ が (i,j,l) に正則に作用することから,

$$\begin{aligned}
\mid G_2(q) \mid &= q^3(q^3 + \varepsilon)q^2(q^3 - \varepsilon)q(q^2 - 1) \\
&= q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1).
\end{aligned}$$

また, 体の標数が 2 の場合でも, 基底 $\{x_1, \cdots, x_8\}$ が以下の条件を満たすようにおくことで $G_2(q)$ の位数を求められる.
$a, b \in \mathbb{F}_q\ s.t.\ b \neq 0,\ a^2 + b^2 = -1$ に対し,

$$\begin{aligned}
2x_1 &= i_4 + ai_6 + bi_0, & 2x_8 &= i_4 - ai_6 - bi_0, \\
2x_2 &= i_2 + bi_3 + ai_5, & 2x_7 &= i_2 - bi_3 - ai_5, \\
2x_3 &= i_1 - bi_6 + ai_0, & 2x_6 &= i_1 + bi_6 - ai_0, \\
2x_4 &= 1 + ai_3 - bi_5, & 2x_5 &= 1 - ai_3 + bi_5.
\end{aligned}$$

また, 乗積表は以下のようになる (空欄は 0).

	x_1	$x2$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1					x_1	x_2	$-x_3$	$-x_4$
x_2			$-x_1$	x_2			$-x_5$	x_6
x_3		x_1		x_3		$-x_5$		$-x_7$
x_4	x_1			x_4		x_6	x_7	
x_5		x_2	x_3		x_5			x_8
x_6	$-x_2$		$-x_4$		x_6		x_8	
x_7	x_3	$-x_4$			x_7	$-x_8$		
x_8	$-x_5$	$-x_6$	x_7	x_8				

参考文献

[1] Robert A.Wilson, *The finite simple groups*, Graduate Texts in Mathematics,pp.118-122,2009

[2] JohnH.Conway,DerekH.Smith, *On Quaternions and Octonions*, A K Peter Natick, Massachusetts,pp.21-25,1962

[3] 鈴木道夫, 群論上,pp.356-367,1977