P-15

多次元 Skorohod 方程式と反射壁付き確率微分方程式

Multi-dimensional Skorohod equation and reflecting stochastic differential equations

○福島弘樹[1]

1 Introduction

$W = \{W_t; 0 \le t < \infty\}$ を 1 次元標準 Borwn 運動とするとき, 反射壁付き Brown 運動 $|W| = \{|W_t|; 0 \le t < \infty\}$ は,1 次元の Skorohod 方程式

$$X_t = W_t + \varphi_t;\ 0 \le t < \infty$$

の解と同分布であることが知られている. ここで $X_t \ge 0$ であり,φ は $\varphi_0 = 0$ かつ

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{0\}}(X_s) d\varphi_s = \varphi_t \text{ a.s.}$$

をみたす連続増加過程である.

一方, 次元 d が 2 以上の場合, これと同様の性質を持つ φ がとれるかどうかは自明ではない. ここでは多次元版の Skorohod 方程式と, それに関連して反射壁付きの確率微分方程式について 1978 年に H. Tanaka[1] により考察された結果を紹介する.

2 多次元 Skorohod 方程式

$C(X, Y)$ を X から Y への連続関数全体,$D(X, Y)$ を X から Y への, 右連続左極限を持つ関数全体とする.$D \subset \mathbb{R}^d$ を convex domain とする.

Definition 1 $w(0) \in \overline{D}$ なる $w \in C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ に対して $(\varphi, \xi) \in D([0, \infty), \overline{D}) \times C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ が **Skorohod 方程式**

$$\xi_t = w_t + \varphi_t;\ 0 \le t < \infty \tag{2.1}$$

の解であるとは, 次をみたすときにいう*:*

(i) ξ, φ は (2.1) をみたす.

(ii) φ は $\varphi_0 = 0$ をみたし, かつ各成分ごとに有界変動である.

(iii) φ の全変動 $|\varphi|$ に対して $\{t \in [0, \infty); \xi_t \in D\}$ は $d|\varphi|$ で測度 0 である.

(iv)

$$\varphi(t) = \int_0^t n(s) d|\varphi|_t$$

が成り立つ. ここで測度 $d|\varphi|$ に関してほとんどすべての t に対して $n(t)$ は $\xi_t \in \partial D$ の normal vector である. すなわち,ξ_t における D の接超平面を H とするとき,$n(t)$ は長さ 1 で H と垂直かつ D に対して内向きのベクトルである.

また,φ が上の *(ii)* から *(iv)* をみたすとき,ξ に対して **associated** であるという.

convex domain D に対してある程度の条件を課せば,Skorohod 方程式 (2.1) は一意解をもつ.

Theorem 1 convex domain D に次の条件を仮定する:

定数 $\varepsilon > 0, \delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \partial D$ に対して $B_\varepsilon(x_0) \subset D$ かつ $|x - x_0| \le \delta$ をみたす開球 $B_\varepsilon(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^d; |y - x_0| < \varepsilon\}$ が存在する.

このとき $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ ならば,Skorohod 方程式の解が一意に存在する.

[1]日大理工・院 (前)・数学

3　確率論における多次元 Skorohod 方程式

w を semimartingale ととることで,convex domain D に関する条件を取り除くことが出来る.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を完備な確率空間とし,$\mathfrak{F}$ の部分 σ-加法族の増大列 $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ が備えられているとする. 各 $\mathfrak{F}_t$ はすべての P-null set を含み, かつ $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}$ をみたすとする.

Theorem 2 $\{M_t; 0 \leq t < \infty\}$ を $M_0 \in \overline{D}$ なる $\mathbb{R}^d$ 値過程で, 各成分は局所 $\{\mathfrak{F}_t\}$-*martingale* であるとする. また $\{A_t; 0 \leq t < \infty\}$ を,$\mathbb{R}^d$ 値, 有界変動かつ $A_0 = 0$ なる連続 $\{\mathfrak{F}_t\}$-適合過程とする. このとき方程式

$$X_t = M_t + A_t + \Phi_t \tag{3.1}$$

の解 (X, Φ) が一意に存在する. ここで (X, Φ) が (3.1) の解であるとは,P-*a.s.* で (3.1) をみたす $\overline{D}$ 値 $\{\mathfrak{F}_t\}$-適合な過程 $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ と $\mathbb{R}^d$ 値過程 $\Phi = \{\Phi_t; 0 \leq t < \infty\}$ であって,P-*a.s.* で Φ が X に対して *associated* であるときにいう.

4　反射壁付き確率微分方程式

$(\Omega, \mathfrak{F}, P), \{\mathfrak{F}_t\}$ は第 3 章と同様とする.$B = \{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^r), \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の r 次元標準 Brown 運動とし,$b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x); 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ を,$[0,\infty) \times D$ から $\mathbb{R}$ への Borel 可測関数とする. **反射壁付き確率微分方程式**：

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t + d\Phi_t,\ X_0 = x \in \overline{D}, \tag{4.1}$$

あるいはそれと同値な

$$X_t^i = x + \int_0^t b_i(s, X_s)dt + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j + \Phi_t^i;\ 1 \leq i \leq d \tag{4.2}$$

を考える. 反射壁付き確率微分方程式 (4.1) の解とは,$\{\mathfrak{F}_t\}$-適合な $\overline{D}$ 値確率過程 $X_t = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ と $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $\Phi_t = \{\Phi_t; 0 \leq t < \infty\}$ であって,(4.2) をみたし, かつ P-a.s. で Φ が X に対して associated であるときにいう.

Theorem 3 ある $K > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|, |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|$$
$$\|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|^2)^{1/2}, |b(t,x)| \leq K(1+|x|^2)^{1/2}$$

をみたすと仮定する. このとき任意の $x \in \overline{D}$ に対して (4.1) の解 (X, Φ) が道ごとに一意に存在する. ここで $d \times r$ 行列 $\sigma = (\sigma_{ij})$ に対して

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}^2$$

である.

参考文献

[1] H. Tanaka: *Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions,* Hiroshima Math J. 9 (1979), 163-177.