P-16

Discrete point process 上のシンプルランダムウォークに対する quenched invariance principle

久保田直樹[1]

Abstract: We consider the simple random walk on random graphs generated by discrete point processes. This random graph has a random subset of a cubic lattice as the vertices and lines between any consecutive vertices on lines parallel to each coordinate axis as the edges. Under the assumption that discrete point processes are finitely dependent and stationary, we prove that the quenched invariance principle holds, that is, for almost every configuration of a point process, the path distribution of the walk converges weakly to that of a Brownian motion.

1　はじめに

確率論において, 大数の法則と中心極限定理と呼ばれる定理は過程の性質を知る上で大きな役割を果たす. これら 2 つの定理が成立する代表的なモデルは $\mathbb{Z}$ 上のシンプルランダムウォーク, すなわち, 原点に配置された粒子が 1/2 の確率で左または右の点に $\mathbb{Z}$ 上を移動していくモデルである. この場合, 大数の法則はランダムウォークの漸近挙動を, また中心極限定理はランダムウォークの漸近挙動に対する誤差評価をそれぞれ解析している. $\mathbb{Z}$ 上のシンプルランダムウォークでは非常に均質な媒質中で運動する粒子の動きを観測しているが, 現実には不純物等が混じり構造が不規則になった媒質中を運動する粒子を考える必要がある. そこで近年, ランダムな媒質中のランダムウォーク (以下, 簡単のため RWRE と表す) についての研究が盛んに行われ, それに対する大数の法則や中心極限定理についても解析されてきた. また, 不変原理という中心極限定理の無限次元化にあたる定理についても研究が行われている. RWRE に対する不変原理は, ある方向に過渡的であるような RWRE やランダムコンダクタンス間のランダムウォークについては既に知られている, 例えば [1], [2] または [4] などを参照していただきたい. ここで挙げたモデルは, ランダムな環境が独立同分布である場合やランダムウォークが一様に有界なジャンプを持つ場合を扱っている. そこで, これらの条件を満たさないモデルに対する不変原理に焦点を当てて考えることにする. 次章で説明するモデルは [3] によって導入され, 独立同分布でないランダム環境と一様に有界でないジャンプを持つランダムウォークを扱っている. [3] の中で大数の法則と中心極限定理については成立することが証明されているが, 不変原理についてはよく分かっていなかった. 今回は, このモデルに対して不変原理が成立するかどうかを考察する.

2　モデル

この章では, 今回扱うモデルについての説明を行う. まず, $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ とし, その要素を $\Omega = (\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ で表すことにする. この空間 Ω に標準的直積 σ-加法族 $\mathcal{G}$ と以下の仮定を満たす確率測度 $\mathbb{Q}$ を与える:

(A1) $0 < \mathbb{Q}(\omega(0) = 1) < 1$,

(A2) $\mathbb{Q}$ は finitely dependent, すなわち, ある $\ell > 0$ が存在して, $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ が $\mathrm{dist}(A, B) \geq \ell$ を満たすならば $\sigma(\omega(x); x \in A)$ と $\sigma(\omega(x); x \in B)$ は $\mathbb{Q}$ の下で独立である,

(A3) $\mathbb{Q}$ は Ω 上の標準的なシフトに関して不変である.

このとき, $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムな集合 $\mathcal{P}(\omega) := \{x \in \mathbb{Z}^d; \omega(x) = 1\}$ を **discrete point process** (以下, 簡単のため DPP と表す) と言う. 仮定 (A1) より, $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega; \omega(0) = 1\}$ 上の確率測度 $\mathbb{P}$ を次のようにして定義できる:

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\mathbb{Q}(A \cap \Omega_0)}{\mathbb{Q}(\Omega_0)}, \qquad A \in \mathcal{G}.$$

[1] 日大理工・院 (後)・数学

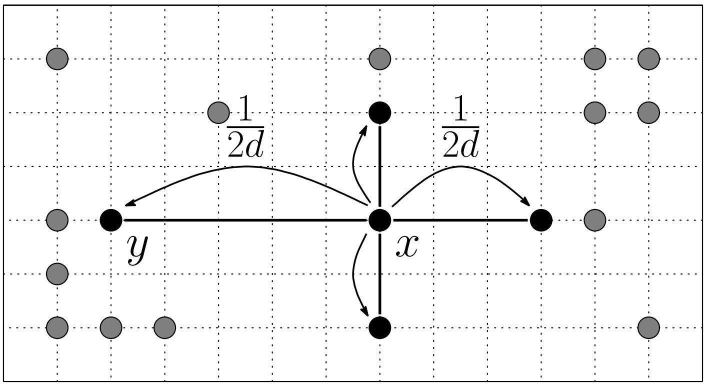

図 1　格子上の点は $\mathcal{P}(\omega)$ の配置を表している．また, SRWDPP は点 $x \in \mathcal{P}(\omega)$ からその最隣接点に確率 $1/(2d)$ で移動する．

さらに, 仮定 (A1)-(A3) より, $\mathbb{Q}$-a.s. ω で各 $x \in \mathcal{P}(\omega)$ はその周りに $2d$ 個の最隣接点を持つこと, すなわち, すべての $e \in \{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$ に対して $\min\{n \geq 1; \omega(x+ne)=1\}$ は有限であることに注意する．ここで, $e_1, \ldots, e_d$ は $\mathbb{R}^d$ 上の標準基底である．そこで, 点 $y \in \mathcal{P}(\omega)$ が点 $x \in \mathcal{P}(\omega)$ の最隣接点であるとき $y \overset{\omega}{\sim} x$ と書くことにする．以上の準備の下で, 各 $\omega \in \Omega_0$ に対して, 次のような状態空間 $\mathcal{P}(\omega)$ 上のマルコフ連鎖 $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ を考え, それを **DPP 上のシンプルランダムウォーク** (以下, 簡単のために SRWDPP と表す) と言う: $P_\omega^0(X_0=0)=1$ かつ, $x, y \in \mathcal{P}(\omega)$ に対して,

$$P_\omega^0(X_{n+1}=y|X_n=x)=\begin{cases}\frac{1}{2d} & ,y \overset{\omega}{\sim} x,\\ 0 & ,\text{その他}.\end{cases}$$

3　結果

この章では, 今回得られた結果について述べる．次のような SRWDPP $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ を線形補間した過程を考える:

$$B_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\big(X_{\lfloor tn\rfloor} + (tn - \lfloor tn\rfloor)(X_{\lfloor tn\rfloor+1} - X_{\lfloor tn\rfloor})\big), \qquad t \geq 0.$$

このとき, 主結果として次が得られた:

Theorem 3.1 $\mathbb{P}$-a.s. ω に対して, 法則 P_ω^0 を持つ SRWDPP $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ の線形補間 $(B_n(t)_{t\geq 0})$ は, ω に依存しない共分散行列を持つブラウン運動に弱収束する．

References

[1] Marek Biskup and Timothy M. Prescott. Functional CLT for random walk among bounded random conductances. *Electron. J. Probab.*, Vol. 12, pp. no. 49, 1323–1348, 2007.

[2] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. Almost sure functional central limit theorem for ballistic random walk in random environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, Vol. 45, No. 2, pp. 373–420, 2009.

[3] Ron Rosenthal. Random walk on discrete point processes. *Preprint*, 2010. `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1005/1005.1398v1.pdf`.

[4] Alain-Sol Sznitman and Martin Zerner. A law of large numbers for random walks in random environment. *Ann. Probab.*, Vol. 27, No. 4, pp. 1851–1869, 1999.