P-17

リーマンの写像定理
The Reman mapping theorem

金田健児[1]
Kaneda Kenji

1　はじめに
リーマンの写像定理とは,「単純閉曲線で囲まれた任意の領域は, 単葉な正則関数によって単位円板上に写すことができる」という主張である．この定理により, 単純閉曲線で囲まれた任意の 2 つの領域を互いに等角に写すことができる．なぜならば, 中間に単位円を媒介させればよい．以下にリーマンの写像定理の証明の主要部を見ていく．

2　定理 1 Vitali's convergence theorem
$f_n(z)$ は, 領域 D 内で正則な関数列とする．すべての n と D 内の z で

$$|f_n(z)| \leq M$$

とする．そして,$f_n(z)$ は, ある集合 L で収束し, L は D 内に集積点をもつとする．このとき, $f_n(z)$ は, D の内部の任意の領域に一様収束する．証明は省略する．

2.1　定理 2
D 内で正則かつ有界な関数列から部分列をとり, D の内部で一様収束するようにることができる．
証明
$f_n(z)$ を関数列とし, D 内で $|f_n(z)| \leq M$ とする．$z_1, z_2, \cdots$ を D 内の集積点をもつ点列とする．点 $w_n = f_n(z_1)$ は, すべて w 平面の円 $|w| \leq M$ 内にある．従って, $f_n(z)$ は, 少なくとも 1 つ集積点をもつ。つまり, 点 z_1 で収束する関数列

$$f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \cdots \qquad (1)$$

となるような n の値の列 $n_1, n_2, \cdots$ が存在する．同様に, (1) の関数列から, 点 z_2 で収束する部分列

$$f_{p_1}(z), f_{p_2}(z), \cdots \qquad (2)$$

を取り出す．(2) から, 点 z_3 で収束する部分列

$$f_{q_1}(z), f_{q_2}(z), \cdots \qquad (3)$$

を取り出す．以下同様に繰り返し, 関数列

$$f_{n_1}(z), f_{p_2}(z), f_{q_3}(z), \cdots$$

を考える．これは, 上記の関数列を横に並べ, 対角線部分を取り出したものである．この関数列は, (1) に所属するので z_1 で収束する．次に, (2) に所属するので, z_2 で収束する．以下同様に続く．よって, 各点 $z_1, z_2, \cdots$ で関数列は収束する．よって Vitali's convergence theorem より, 任意の領域 D の内部で一様収束する．

3　定理 3 Representation of any region on a circle.
3.1
a と b は D の境界上にあるとし.

$$w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

とおく．D 内で関数の 1 つの枝を制限することができる．この枝は, 単葉であり, 値は w 平面の一部分だけを覆うようにとることができる．w_0 は, 覆われない点とすると

$$\frac{1}{w-w_0}$$

は, D 内で単葉かつ有界．また

$$f(z) = \frac{p}{w-w_0} + q$$

は, 単葉かつ有界．そして, p と q は D 内の点 P で, $f(z) = 0$ と $f'(z) = 1$ を与えるように選べる．そこで, D 内で単葉かつ有界, D 内の点 P で $f(z) = 0$ と $f'(z) = 1$ を与えるような全ての関数 $f(z)$ を考える．$M(f)$ は, $f(z)$ の絶対値の最大値を示す．また ρ は, $M(f)$ の上記のような全ての関数での下限とする．関数列 $f_1, f_2, \cdots$ は, $\lim M(f_n) = \rho$ となるように置く．

$f_n(z)$ は, D 内で有界より, 関数列の一部分を取り出すと, 極限は D の内部の任意の領域において一様収束する．そこ

[1]日大理工・院 (前)・数学

で, $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \cdots$ を取り出した関数列, $\phi(z)$ をその極限とする．$\phi(z)$ は上記の f の集合に入る．なぜならば $\phi(z)$ は有界で, 点 P で $\phi(z) = 0$, $\phi'(z) = 1$ そして,$\phi(z)$ は単葉．$\phi'(z) = 1$ より, $\phi(z)$ は定数ではない．ρ の定義より, $M(\phi) \geq \rho$ そして

$$M(f_{nv}) < \rho + \epsilon \quad (v > v_0)$$

つまり

$$|f_{nv}(z)| < \rho + \epsilon \quad (v > v_0)$$

$v \to \infty$ とすると, $|\phi(z)| < \rho + \epsilon$ が導かれる．
つまり, $M(\phi) \leq \rho$ である．よって, $M(\phi) = \rho$ となるような関数 $\phi(z)$ が存在する．そして, $\phi(z)$ は定数ではないので, $\rho > 0$ である．

3.2

関数 $w = \phi(z)$ は,D 内で, 円 $|w| < \rho$ に写される．
証明
$\rho = 1$ のときを考える．Δ を D 上で $w = \phi(z)$ で写した w 平面の領域とする．$M(\phi) = 1$ より, Δ は, $|w| \leq 1$ の内部, そして, 少なくとも 1 点で円周に達する．もしこの定理が, 間違いだとすると, Δ は, 境界の点 α を円の内部にもつ ($|\alpha| < 1$)．関数

$$w_1 = \sqrt{\frac{w - a}{\bar{\alpha}w - 1}}$$

は, Δ 内の w で正則．また $|w| \leq 1$ のとき $|w_1| \leq 1$
そして, $w_1(0) = \sqrt{\alpha}$

$$w_2 = \frac{w_1 - \sqrt{\alpha}}{\bar{\sqrt{\alpha}}w_1 - 1}$$

とする．
$|w_1| \leq 1$ のとき, $|w_2| \leq 1$ そして

$$\frac{dw_2}{dz} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dw_2}{dw}$$

$$\frac{dw_2}{dw} = \frac{dw_2}{dw_1} \cdot \frac{dw_1^2}{dw} \cdot \frac{1}{2w_1} = \frac{|\alpha| - 1}{(\bar{\sqrt{\alpha}}w_1 - 1)^2} \cdot \frac{|\alpha|^2 - 1}{(\bar{\alpha}w - 1)^2} \cdot \frac{1}{2w_1}$$

$z = P$ のとき $w = 0$, $\dfrac{dw}{dz} = 1$ より，この値を代入して

$$\frac{|\alpha| - 1}{(|\alpha| - 1)^2} \cdot \frac{|\alpha|^2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{|\alpha| + 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

この微係数は 1 より大きい．従って

$$w_3 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{|\alpha| + 1} w_2$$

という関数を考えると

$$M(w_3) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{|\alpha| + 1} < 1$$

となり, 最大値が 1 より小さい関数がとれてしまう．これは矛盾である．よって定理は証明されたと言える．

Reference

[1]The Theory of Functions E.C.TITCHMARSH
[2] 複素解析 L.V. アールフォルス (著) 笠原乾吉 (訳)
[3]Topics in Complex Functions Volume I，II C.L.Siegel