P-18

日大理工・院（前）・数学

3 次元多様体および Dehn-Lickorish の定理

3-manifolds and the Dehn-Lickorish Theorem

指導教授　　松元 重則

講演者 M0013 松山 悟士

1　3 次元多様体

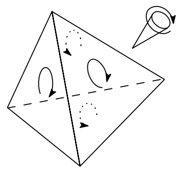
3 次元多様体とは、コンパクト連結距離空間で各点の近傍として R^3 と同相なものをもつもののことである。また、各点が R^3 または R^3_+ と同相の近傍を持つとき、境界付きの 3 次元多様体という。(R^3_+ は (閉) 上半空間)

また、境界付きの 3 次元多様体を M とすると、その境界は δM と表す。

2　3 次元多様体の向き

2.1. 三角形分割

3 次元多様体の向きを以下のように定義する。まず、3 次元多様体を有限個の四面体に分割する (これを三角形分割という)。ここで、分割された四面体の向きについて考える。



分割された四面体のそれぞれにねじを打ち込み向きを与える。隣り合う四面体の向きが同調しているとき、3 次元多様体は向き付け可能といい、その向きが定まる。

2.2.Heegaard 分解

種数 g の handle 体 M^3_1,M^3_2 を用意する。同相写像

$$h : \delta M^3_1 \quad \rightarrow \quad \delta M^3_2$$

が与えられたとき、M^3_1 と M^3_2 を h によって張り合わせることができ、この張り合わせによって境界のない向き付け可能な 3 次元多様体が得られる。

また逆に、境界のない向き付け可能な 3 次元多様体は 2 つの handle 体 (種数 g) に分解することができ、これを Heegaard 分解という。つまり、以下の定理が成り立つ。

Theorem 2.3.

任意の向き付け可能な 3 次元多様体は Heegaard 分解をもつ。

3　Heegaard diagrams

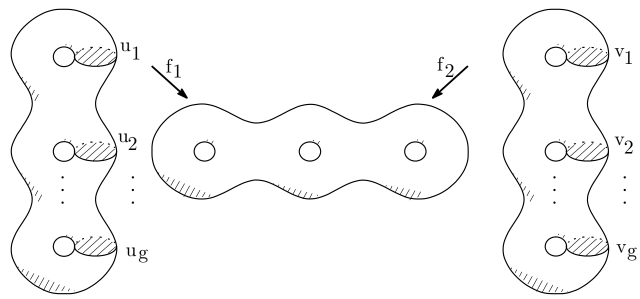
3.1.

3 次元多様体 M^3 の Heegaard 分解によって与えられた、種数 g の 2 つの handle 体 M^3_1, M^3_2 の境界上の閉曲線の系が以下の方法で定まる。handle 体 M^3_1, M^3_2 の R^3 への標準的な埋め込みを考える。それらの境界上には meridian $u_1, ..., u_g, v_1, ..., v_g$ が定まる。これらは handle 体において互いに交わらない円板をはるものである。

N を種数 g の閉曲面とし、同相写像

$$f_2 : \delta M^3_2 \rightarrow N$$

を定める。このとき、N 上に閉曲線 $f_2 \circ f(u_i)$ と $f_2(v_i), i = 1, ..., g$ が定まる。



Definition 3.2.

種数 g の handle 体 N 上の曲線 $\{f_2 \circ f(u_i)\}$, $\{f_2(v_i)\}$　$i = 1, ..., g$ の系は、3 次元多様体 M^3 の Heegaard diagram と呼ばれる。

Theorem 3.3.

2 つの多様体 M と M' が同じ Heegaard diagram を持つとき、M と M' は同相である。

Definition 3.4.

種数 g の handle 体 N 上の閉曲線 $u_1, ..., u_g$ と $v_1, ..., v_g$ は以下の 2 つの条件を満たすとき、Heegaard diagram を成すという。

1) 曲線 $u_1, ..., u_g$ は互いに交差せず、合併の補集合は連結である。

2) 曲線 $v_1, ..., v_g$ は互いに交差せず、合併の補集合は連結である。

4　Dehn-Lickorish の定理

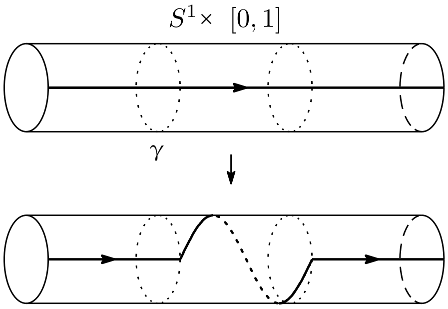
4.1. Dehn twist

2 次元曲面 N で id と isotopic でない、向きを保つ同相写像で、以下の方法で得られるものがある。

γ を N の単純閉曲線とし、$S^1 \times\ [0,1]$ を N 内の annulus で、その境界円のひとつが γ であるものとする。N の同相写像 τ_γ を

$$S^1 \times\ [0,1] \text{ の外側で } \tau_\gamma = id$$
$$\tau_\gamma(x,t) = (x + 2\pi, t)$$

と定める。この τ_γ を閉曲線 γ に沿った N の Dehn twist と呼ぶ。



Theorem 4.2.(Dehn-Lickorish Theorem)

向き付けされた境界のない 2 次元多様体の向きを保つ任意の同相写像は、有限個の Dehn twist および id と isotopic な同相写像の積で表される。

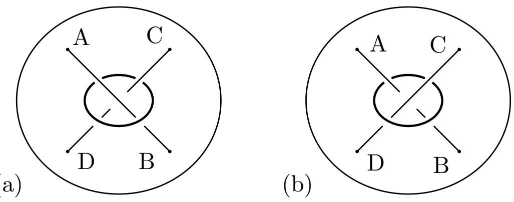
Corollary 4.3.

任意の向き付けられた 3 次元多様体 M^3 は S^3 の中からいくつかの solid torus を切り取って、それらを再び張り合わせることによって得られる。さらに、それらの solid torus すべては自明な結び目にとることができる。

上の最後の主張の証明には、次の Lemma が用いられる。

Lemma 4.4.

$D^3 \subset R^3$ を 3-disk とし、$T \subset D^3$ は下の図に見られるような soid torus とする。このとき、図 (a) にみられるような曲線 AB と曲線 CD から、図 (b) のような曲線 AB と曲線 CD に写す $D^3 - T$ 上の同相写像が存在する。そして、その同相写像は D^3 の外側で恒等である。



(a)　(b)

この Lemma を示すために、以下の定理を用いる。この定理は、結び目、絡み目理論の基本的事項であり、広く応用されている。

Theorem 4.5.

任意の成分 m の link L は、適切な交差換えによって自明な link(成分 m) に変形できる。

参考文献

V.V.Prasolov,A.B.Sossinsky:Knots,Links,Braids and 3-Manifolds:American Mathematical Society