P−3

$(x^iy^j,\ x^ky^l)$ の軌道の整数点について

Integer Points in Orbits of $(x^iy^j,\ x^ky^l)$

○安福 悠[1]
Yu Yasufuku[1]

概 要

Dynamics is a studiy of iterations of a self-map $\phi : X \longrightarrow X$. For example, one would study an orbit of a point P, defined by the set $\{P, \phi(P), \phi(\phi(P)), \phi(\phi(\phi(P))), \ldots\}$.

Here we analyze the dynamics of maps of the form $\phi = (x^iy^j, x^ky^l)$ on $\mathbb{Q}^2$, where $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$. Our first result is that if some iterate of such a map has no denominators, then the first such iterate is $1, 2, 3, 4, 6, 8$, or 12. We then characterize maps whose orbits always contain just finitely many integers. Our condition is based on the eigenvalues and the eigenvectors of the exponent matrix $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$. In cases when there are just finitely many integers in all orbits, we also show that the sizes of the numerators and the denominators are comparable.

1 代数的力学系の紹介

力学系とは，ある空間 X とその上の自己写像 $\phi : X \longrightarrow X$ が与えられた時に，ϕ の多重合成 $\phi^{(n)} = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n\text{ 回}}$ を調べる分野であり，約 100 年の歴史がある．元々は X を複素数，ϕ を有理型関数としての研究であった．例えば，多重合成写像の集合 $\{\phi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が同程度連続になる点と，同程度連続にならない点に分け，漸近的性質が研究された．同程度連続にならない場合の方が難しく，これらの点はジュリア集合と呼ばれ，カオス的となる．有名なマンデロブロ集合とは，ジュリア集合が連結になるような 2 次有理写像の集まりである．

代数的力学系は，比較的新しい分野で，X を代数多様体 (多項式の零集合)，ϕ を多項式で定義できる写像として，力学系の問題を考察する．例えば，$X = \mathbb{Q}$ とし，ϕ を有理係数一変数多項式とする．ある $n \geq 1$ に関し，$\phi^{(n)}(x) = x$ となるような x のことを周期点というが，例えば ϕ の周期点が何個あるかを決定する問題を考える．同じ問題を $X = \mathbb{C}$ で考えると，代数学の基本定理より，各 n 毎に次数の n 乗個の周期点があるので，あまり面白い問題ではないが，$X = \mathbb{Q}$ では，有理数上の解だけを数えるので，飛躍的に難しい問題になる．

本講演では，代数的力学系の次の結果を紹介する．当時ニューヨーク市立大学の学部生であった Aryeh Gregor 氏との共同研究 [1] である．

2 主結果

点 P の ϕ による軌道とは

$$\mathcal{O}_\phi(P) = \{P, \phi(P), \phi^{(2)}(P), \phi^{(3)}(P), \ldots\}$$

である．つまり P から始め，ϕ を作用させ，その結果にまた ϕ を作用させ，という作業を繰り返し行ったときに残る，いわば P の足跡である．

本講演では，$X = \mathbb{Q}^2$, $\phi = (x^iy^j, x^ky^l)$ とした時 (i, j, k, l は負でもよい整数) の，軌道の整数点に関する 3 つの結果である．整数点とは，両座標が整数になる点のことを表す．

ϕ の指数を行列化し，$A = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ とおくと，$\phi^{(n)}$ の指数行列は A^n となる事が確かめられる．$\phi^{(n)}$ の指数行列の全ての成分が非負の場合，P が整数点ならば，全ての $m \geq 1$ に対し $\phi^{(mn)}(P)$ も整数点となり，軌道の整数点は自動的に無限個となる．第一の結果は，ϕ の多重合成がこのような「整式型」，つまり負の指数がない形になりうる可能性についてである．

定理 1. $\phi^{(n)}$ が整式となる n が存在するならば，最初のこのような n は $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ のいずれかである．

[1]日大理工・教員・数学

1 変数多項式では，2 重合成が整式でない限りどんな n 重合成も整式にならないというシルバーマンの結果があり [2]，定理 1 はこの類似である．上の定理であげられた回数で初めて整式となる具体例もそれぞれ存在する．

証明には，非負成分の行列の固有値・固有ベクトルについての必要条件を与えるフロベニウスーペロンの定理や，円分体の理論などを使う．定理の結論にでてくる数は，円分拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ のガロア群がクライン 4 元群の部分群になる n である．

次に，全ての軌道に有限個しか整数点が含まれない $(x^i y^j, x^k y^l)$ の特徴づけである．

定理 2. $\phi = (x^i y^j, x^k y^l)$ とし，A をその指数行列とする．ϕ の軌道のうちの少なくとも一つは無限個からなるとする．全ての軌道が有限個しか整数点を含まないのは，次のいずれかの場合である：

(1) A に実数固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$ があり，$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ かつ $|\lambda_1| > 1$ かつ $(i - \lambda_1)j > 0$ の時.

(2) A に有理数固有値 λ_1, λ_2 があり，$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ かつ $|\lambda_1| > 1$ かつ $(i - \lambda_1)j > 0$，さらに $|\lambda_2| \leq 1$ か $(i - \lambda_2)j > 0$ のどちらかを満たす時.

(3) A が対角化不可能で，唯一の固有値 λ が $|\lambda| > 1$ かつ $(i - \lambda)j > 0$ を満たす時.

(4) $m \geq 1$ に対し，$\phi = (x/y^m, y)$, $(y^m/x, 1/y)$, $(x, y/x^m)$, あるいは $(1/x, x^m/y)$ の時.

これら以外の場合 （例えば A に複素固有値がある場合）では，無限個の整数点を含む軌道が存在する．

最後に，定理 2 の精密化である．軌道の点は，殆ど整数点にならないだけでなく，整数からは「程遠い」有理点だという主張である．

定理 3. ϕ が定理 2 の (1)–(3) に属するとし，P の軌道が無限集合だとする．$\phi^{(n)}(P)$ の x 座標と y 座標を既約分数で書いた時，N_n を分子の積，D_n を分母の積とする．このとき

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\max(\log|N_n|, \log|D_n|)}{\min(\log|N_n|, \log|D_n|)}$$

が存在し，正の数である．

極限が正の数ということは，分母と分子の大きさがほぼ (対数的に) 等しいということで，整数 (つまり分母が 1) からは遠い有理数であることを示している．

定理 2 と 3 の証明では，固有値・固有ベクトルを使って行列の冪乗計算の公式を作れることがポイントとなる．$\phi^{(n)}$ の指数行列が行列 A の冪乗のため，$(\phi^{(n)})(P)$ の座標の分母と分子が，各素数で何回割れるかを計算できる．実際の証明では，対角化不可の場合などを別に議論する必要があり，やや面倒である．また，これらの定理は，Vojta 予想という，ディオファントス幾何学の強力な予想を仮定した上で軌道の整数点の有限性を証明した以前の結果 [3] と関連があることを最後に付記する．

参考文献

[1] Aryeh Gregor and Yu Yasufuku, *Monomial maps on* $\mathbb{P}^2$ *and their arithmetic dynamics*, J. Number Theory **131** (2011), no. 12, 2409–2425.

[2] Joseph H. Silverman, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 793–829.

[3] Yu Yasufuku, *Vojta's conjecture and dynamics*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B25**, 75–86.