P−5

反応拡散方程式系の時間大域解の漸近挙動について
解の時間無限大での挙動

Asymptotic behavior of global solutions for a reaction-diffusion system
Large time behavior of solutions

○五十嵐威文[1]
*Takefumi Igarashi[1]

Abstract: We consider the initial value problem for the weakly coupled system of reaction-diffusion equations

$$\partial_t u = \Delta u + t^{q_1}|x|^{\sigma_1} v^{p_1}, \quad \partial_t v = \Delta v + t^{q_2}|x|^{\sigma_2} u^{p_2},$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geq 0,$$

where $x \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$, $p_1, p_2 \geq 1$ with $p_1 p_2 > 1$ and $q_1, q_2, \sigma_1, \sigma_2 \geq 0$. In this lecture, we review the existence and nonexistence of global solutions in time as the known results, and report the large time behavior of the global solutions as the main results.

1. 序論

次の反応拡散方程式系の初期値問題について考察する：

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + t^{q_1}|x|^{\sigma_1} v^{p_1}, & x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0, \\ \partial_t v = \Delta v + t^{q_2}|x|^{\sigma_2} u^{p_2}, & x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbf{R}^n, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

但し，$p_1, p_2 \geq 1$，$p_1 p_2 > 1$，$q_1, q_2, \sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ である．
$BC(\mathbf{R}^n)$ を $\mathbf{R}^n$ における有界な連続関数の空間とする．$a \geq 0$ に対して，次の関数空間を定義する：

$$I^a = \left\{ w \in BC(\mathbf{R}^n); w(x) \geq 0, \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a w(x) < \infty \right\},$$

$$I_a = \left\{ w \in BC(\mathbf{R}^n); w(x) \geq 0, \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a w(x) > 0 \right\},$$

$$L^\infty_a = \left\{ w \in L^\infty(\mathbf{R}^n); w(x) \geq 0, \|w\|_{\infty,a} \equiv \operatorname*{ess.sup}_{x\in\mathbf{R}^n} \langle x \rangle^a |w(x)| < \infty \right\},$$

但し，$\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ である．このとき，$I^a \subset L^\infty_a$ を満たす．

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 p_1}{p_1 p_2 - 1}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1 p_2}{p_1 p_2 - 1},$$

とおく．この初期値問題 (1) に対して，$(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ ならば，時間局所解 $(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \in L^\infty_{\delta_1} \times L^\infty_{\delta_2}$ が一意的に存在する．

2. 既知の結果

$$\alpha_1 = \frac{(2+\sigma_1+2q_1) + (2+\sigma_2+2q_2)p_1}{p_1 p_2 - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{(2+\sigma_2+2q_2) + (2+\sigma_1+2q_1)p_2}{p_1 p_2 - 1}$$

とおく．第 52 回学術講演会では，(1) の時間大域解の存在・非存在について，次の結果を報告した．

定理 A．（時間大域解の非存在）
$(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ かつ $(u_0, v_0) \not\equiv (0,0)$ とする。次の 3 つの条件のうち，いずれか 1 つを満たすとする；
(i) $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq n$
(ii) $u_0 \in I_{a_1}$ with $a_1 < \alpha_1$ または $v_0 \in I_{a_2}$ with $a_2 < \alpha_2$
(iii) ある $\nu_0 > 0$ および十分大きな $M > 0$ に対して，$u_0(x)$ or $v_0(x) \geq M \exp\left(-\nu_0 |x|^2\right)$
このとき，(1) の解は時間大域的ではない．

[1]日大理工・教員・一般、College of Science and Technology, Nihon Univ., Assistant Professor, General Education

定理 B.（時間大域解の存在）

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < n, \tag{2}$$

かつ

$$(u_0, v_0) \in I^{a_1} \times I^{a_2} \text{ with } a_1 > \alpha_1,\ a_2 > \alpha_2 \tag{3}$$

を満たすとする．$\|u_0\|_{\infty,a_1}$ および $\|v_0\|_{\infty,a_2}$ が十分小さいとする．このとき，(1) の解は時間大域的である．さらに，$\mathbf{R}^n \times (0,\infty)$ において，

$$u(x,t) \le Ce^{t\Delta}\langle x\rangle^{-a_1}, \quad v(x,t) \le Ce^{t\Delta}\langle x\rangle^{-a_2} \tag{4}$$

を得る．ここで，C は正の定数で，作用素 $e^{t\Delta}$ は

$$e^{t\Delta}w(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) w(y)dy. \tag{5}$$

で定義する．

本講演では，$t \to \infty$ のときの時間大域解の挙動について報告する．

3. 主結果

時間大域解の漸近挙動に関して，次の定理を得た．

定理 1. $(u(x,t), v(x,t))$ を (1) の時間大域解とする．
(3) の $a_1 < n$ かつ

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{a_1} u_0(x) = A_1 > 0 \tag{6}$$

ならば，$t \to \infty$ のとき，$\mathbf{R}^n$ に関して一様に

$$t^{a_1/2}\left|u(x,t) - A_1 e^{t\Delta}|x|^{-a_1}\right| \to 0 \tag{7}$$

となる．$a_2 < n$ かつ

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{a_2} v_0(x) = A_2 > 0, \tag{8}$$

ならば，$t \to \infty$ のとき，$\mathbf{R}^n$ に関して一様に

$$t^{a_2/2}\left|v(x,t) - A_2 e^{t\Delta}|x|^{-a_2}\right| \to 0 \tag{9}$$

となる．

定理 2. $(u(x,t), v(x,t))$ を (1) の時間大域解とする．
(3) の $a_1 > n$ ならば，$t \to \infty$ のとき，$\{x \in \mathbf{R}^n; |x| \le Rt^{1/2}\}$ $(R > 0)$ に関して一様に

$$t^{n/2}\left|u(x,t) - M_1(4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}\right| \to 0 \tag{10}$$

となる．但し，

$$M_1 = \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)dx + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} t^{q_1}|x|^{\sigma_1} v(x,t)^{p_1} dxdt < \infty. \tag{11}$$

である．$a_2 > n$ ならば，$t \to \infty$ のとき，$\{x \in \mathbf{R}^n; |x| \le Rt^{1/2}\}$ $(R > 0)$ に関して一様に

$$t^{n/2}\left|v(x,t) - M_2(4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}\right| \to 0 \tag{12}$$

となる．但し，

$$M_2 = \int_{\mathbf{R}^n} v_0(x)dx + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} t^{q_2}|x|^{\sigma_2} u(x,t)^{p_2} dxdt < \infty. \tag{13}$$

である．

4. 参考文献

[1] T. Igarashi, "Asymptotic behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations", Bulletin of department of general education, College of Science and Technology, Nihon University, Vol.90, 2011, to appear.
[2] T. Igarashi and N. Umeda, "Existence and nonexistence of global solutions in time for a reaction-diffusion system with inhomogeneous terms", Funkcialaj Ekvacioj, Vol.51, pp17–37, 2008.