P-7

Dirichlet 境界条件下での、保存量を持つ界面モデルに対する流体力学極限

Hydrodynamic limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model with a conservation law and the Dirichlet boundary condition

○西川　貴雄[*1]

２つの相反する相が混在して存在する時、これらの相を分離する界面が現れる。例えば、水と油、氷と水、合金などでそのような現象が観察できる。また、机などの上に水を垂らしたときに現れる水滴の形も界面の一つと考えられる。私は、「これら自然現象の中で現れる界面の運動を数学的に説明したい」という動機に基づき研究を行っている。特に、確率論を使った手法により統計力学的観点からの考察を行っている。

Ising モデルに代表されるスピン系が相分離の自然なモデルとして考えられるが、研究の対象となる二つの相が共存する状況（つまり相転移が起きている状況）下では、自然に導入される時間発展の解析には非常に困難を伴う。そこで、相転移を内在的に扱うのではなく、相転移が起きていることを最初から認めたモデルが導入された。つまり、二相を分離する界面そのものを微視的対象物、つまり秩序変数としたモデルを考察の対象とするのである。こうして導入されたモデルは実効的界面モデルと呼ばれ、その一つが今回の講演における対象である「$\nabla\phi$ 界面モデル」である。

$\mathbb{Z}^d$ 上のスカラー場 ϕ は $\mathbb{R}^{d+1}$ 内に埋め込まれた離散的な超曲面 $\{(x,\phi(x)) \in \mathbb{R}^{d+1}; x \in \mathbb{Z}^d\}$ を定義する。あるいは、適当な補間をすることにより得られる連続超曲面と同一視して考えてもよい。言い換えれば、$\phi(x)$ は格子点 x における超曲面の高さ (height) を与える変数である。物理的には、２つの相を分離する界面 (interface) を定めるものと解釈できる。超曲面 ϕ のもつエネルギーを与えるハミルトニアン $H(\phi)$ として

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d,\,|x-y|=1} V(\phi(x)-\phi(y)), \quad V:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \tag{1}$$

を採用したモデルを $\nabla\phi$ 界面モデルと呼ぶ。このハミルトニアン $H(\phi)$ に対応する Langevin 方程式を考え、それを微視的系と見なしたときの巨視的方程式の導出 (標語的に「流体力学極限」と呼ばれる) については既に [1] (周期境界条件下)、[3] (Dirichlet 境界条件下) により得られている。

このハミルトニアン (1) の下で、粒子数に相当する量を保存量として持つ、川崎力学に相当する系を考え、特にそれを微視的系と見なしたときの巨視的方程式について考察する。周期境界条件下では既に [2] において考察しており、今回は系に Dirichlet 境界条件を課した場合について考える。D をなめらかな境界を持つ凸領域とし、自然数 $N\in\mathbb{N}$ に対し D に対応する離散的領域を $D_N=\{x\in\mathbb{Z}^d;\ B(x/N,5/N)\subset D\}$ により定める。なお、$B(\alpha,l)$ は中心 α で一辺の長さが l の hypercube である。この領域上で Dirichlet 境界条件付きの時間発展を次の確率微分方程式の系により導入する:

$$\begin{cases} d\phi_t(x) = \Delta_{D_N}\dfrac{\partial H}{\partial\phi(\cdot)}(\phi_t)(x)\,dt + \sqrt{-2\Delta_{D_N}}\,dw_t(x), & x\in D_N, \\ \phi_t(x)=0, \quad x\in\mathbb{Z}^d\setminus D_N. \end{cases} \tag{2}$$

ここで、$\{w_t(x); x\in\mathbb{Z}^d\}$ は独立な標準ブラウン運動の族であり、Δ_{D_N} は D_N 上の離散的 Laplacian、つまり

$$\Delta_{D_N}\psi(x) = \sum_{y\in D_N;\,|x-y|=1} (\psi(y)-\psi(x)), \quad \psi^N:\mathbb{R}^{D_N}\to\mathbb{R}$$

である。なお、方程式 (2) は離散的な $(H^1)^*$ 内積の下での Langevin 方程式に対応していることを注記しておく。

[*1] 日大理工・教員・数学

この系を微視的な系として採用し、微視的スケールから巨視的スケールへのスケール変換を、空間について N^{-1} 倍、時間について N^4 倍した

$$h^N(t, x/N) = N^{-1}\phi_{N^4 t}(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d$$

により導入する。このとき、$N \to \infty$ の極限について次の結果が得られた:

定理 1. ハミルトニアン (1) を定義する関数 V は対称な C^2 級関数であり、ある定数 $c_-, c_+ > 0$ が存在し

$$c_- \le V''(x) \le c_+, \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立つと仮定する。また、(2) の初期条件の列 $\phi_0 = \phi_0^N$ に対し、ある $h_0 \in L^2(D)$ が存在して

$$\lim_{N\to\infty} E\|h^N(0) - h_0\|^2_{L^2(D)} = 0$$

を満たすと仮定する。このとき、任意の $t > 0$ に対し、$h^N(t)$ は $N \to \infty$ のとき非線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} h(t,\theta) = -\Delta\,\mathrm{div}\Big\{(\nabla\sigma)(\nabla h(t,\theta))\Big\} \\ \qquad\qquad \equiv -\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left\{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u_i}\right)(\nabla h(t,\theta))\right\}, \quad \theta \in D,\, t > 0, \\ h(t,\theta) = 0, \quad \theta \in D^c, t > 0, \\ \nabla\,\mathrm{div}\Big\{(\nabla\sigma)(\nabla h(t,\theta))\Big\}\cdot\vec{n}(\theta) = 0, \quad \theta \in \partial D, \\ h(0) = h_0 \end{cases} \tag{3}$$

の一意な弱解 $h(t)$ に収束する。つまり、

$$\lim_{N\to\infty} E\|h^N(t) - h(t)\|^2_{H^1(D)^*} = 0$$

が成り立つ。ここで、$\sigma = \sigma(u) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は表面張力 *(surface tension)* と呼ばれる関数であり、(2) に対応する平衡状態から定められる。

注意 1. 大雑把に言えば、方程式 (3) は $(H^1)^*$ 内積の下での総表面張力

$$\Sigma(h) = \int_D \sigma(h(\theta))\,d\theta, \quad h \in H_0^1(D)$$

の勾配流となっている。

謝辞

本研究は平成 22 年度科学研究費（若手研究）獲得支援研究および平成 23 年度理工学部基礎科学研究助成金 (研究助成) による助成を受け、行ったものである。

参考文献

[1] T. Funaki and H. Spohn, *Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model*, Commun. Math. Phys. **185** (1997), 1–36.

[2] T. Nishikawa, *Hydrodynamic limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model with a conservation law*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 481–519.

[3] ———, *Hydrodynamic limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model with boundary conditions*, Probab. Theory Relat. Fields **127** (2003), 205–227.