H1-12

混合型有限要素法に対するＰＭＬ

Application of PML to Mixed Finite Element Method

パレハテ・ラヘマン[1]， 塩尻弘雄[2]， 州彦宇野[3]

Pahaiti Reheman[1], Hiroo Shiojiri[2], Kunihiko Uno[3]

Abstract. Convolution PML is known to have excellent wave absorbing capability, and has been used combined with FDM and FEM. Most of them are splitting type formulation for explicit FEM or FDM. Here implicit non-splitting type convolution PML procedures consistent with mixed formulation FEM as well as displacement based FEM are developed. The resulting coefficient matrices for convolution PML are symmetric if corresponding coefficient matrices of FEM are symmetric. The developed method is applied to dam-reservoir-foundation systems including reservoir cavitations, and the validity of the method is demonstrated.

1．はじめに

通常の有限要素法は，変位のみを未知変数として，仮想仕事の原理や最小ポテンシャルエネルギーの原理の標準的な弱定式化に基づき，離散化して解かれている．しかしながら，このような変位型要素では，要素の精度が変位に対する補間関数の特性のみで決定され，要素特性の改良に限界がある．そこで，要素特性を改良するために，変位だけではなく，ひずみや応力などの中間的に現れる変数を独立な未知関数として，ラグランジュの未定乗数法によって，中間的な独立数と他の変数との関係式を弱形式の形で満足させる修正された変分原理と呼ばれるものが用いられる．これにもとづき有限要素近似を行ったものを混合型有限要素と呼ぶ．本論文では，構造物－地盤－流体の地震時相互作用の解析において，流体の混合要素にPML を対応させ，その効果について検証する．

2. 定式化

力学における境界値問題に対する有限要素法は、通常、平衡方程式および力学的境界条件式と同等な仮想仕事の原理を、節点変位を未知量とする要素によって離散化して解かれる（変位法）。しかし、流体など、比較的非圧縮性にちかい物質の場合など、変位法による離散化ではロッキングなど、数値計算上好ましくない現象が発生する可能性があり、その対策の一つとして、応力も未知数に加える混合型の定式化がある。

ここでは、構造物と流体の地震時相互作用の解析のための流体の混合要素を用いた場合に対応したＰＭＬ要素について述べる。

(1)流体要素

水の粘性を無視し、時間的な密度変化は平均値に比べ小さいと仮定すれば、Euler の方程式より

$$\rho_0 \ddot{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p = 0 \tag{1}$$

ここで x_i は i 番目の座標， ρ_0 は時間平均密度、 p は水圧の静水圧からの変化分、 u_i は変位の x_i 成分である。

密度と変位の関係は、

$$\rho + \rho_0 \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

ここで ρ は密度の時間平均からの変化分である。

水圧と密度の関係式は

$$p = f(\rho) \tag{3}$$

ＰＭＬへの摘要のため、これらの方程式を振動数領域で座標変換する。

$$\tilde{x}_i = \int_0^{x_i} \lambda_i(s)ds \tag{4}$$

ここで $\tilde{x}_i$ は変換された座標、また λ_i は次式で与えられるものとする。

$$\lambda_i = k_i + \frac{\sigma_i}{\alpha_i + i\omega} \tag{5}$$

ここで、 k_i, σ_i, α_i は x_i のみの関数である。 $k_i = 1, \sigma_i = \alpha_i = 0$ とすれば座標変換しない場合と一致する。

とりあえず２次元問題を考えると、(1)(2)が PML 内では座標 $\tilde{x}_i$ に対して成立しているものとして振動数領域で表すと以下のようになる。振動数領域で x_i についての方程式に変換する。式(1)の振動数領域の方程式は次式となる。

$$-\omega^2 \rho_0 \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \bar{p} = 0 \quad (1)’, \qquad \bar{\rho} + \rho_0 \sum_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (2)’$$

ここで $\bar{u}_i, \bar{p}, \bar{\rho}$ はそれぞれ変位成分、圧力変化分，密度変化分の振動数領域での振幅、 ω は各振動数である。

$\partial / \partial \tilde{x}_i = \partial / \partial x_i (dx_i / d\tilde{x}_i) = (1/\lambda_i) \partial / \partial x_i$ であることを考慮して両辺に $\lambda_1 \lambda_2$ を乗ずれば、PML 内の方程式は(1)’ (2)’に対して次のようになる。

$$-\lambda_1 \lambda_2 \omega^2 \rho_0 \bar{u}_i + \lambda_{\not{i}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = 0 \tag{6}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \bar{\rho} + \rho_0 \sum_i \left(\lambda_{\not{i}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{7}$$

ここで、 $\not{i}$ は、整数 1，2 のうち i と異なる数である。

変位に関して w_i 、圧力に関して q を重み関数として式(6)および(3)に対して弱定式化を行うと次式を得る。

$$-\int_V w_i \lambda_1 \lambda_2 \omega^2 \rho_0 \bar{u}_i dv - \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \lambda_{\not{i}} \bar{p} dv = -\int_S w_i n_i \lambda_{\not{i}} \bar{p} ds \tag{8}$$

$$\int_V q \left(p - f(\rho) \right) dv = 0 \tag{9}$$

$e^{-\alpha t} * f(t) = \int_0^t e^{-\alpha (t-t')} f(t')dt' = F(t)$ とおいて $F(t+\Delta t)$ を次式のように近似するものとする。

ただし $f(t)$ は任意の関数、 t は時間、 Δt は数値積分における時間刻みである。

$$\begin{aligned} F(t+\Delta t) &= \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(t+\Delta t - t')} f(t')dt' + e^{-\alpha \Delta t} \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t')dt' \\ &= \Delta t \left\{ (1-\theta) e^{-\alpha \Delta t} f(t) + \theta f(t+\Delta t) \right\} + e^{-\alpha \Delta t} F(t) \qquad (10) \\ &= \theta \Delta t f(t+\Delta t) + F^*(t) \end{aligned}$$

式(10)を入れて整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}&\int_v \rho_0 w_i r_{12} \ddot{u}_i(t+\Delta t)dv + \int_v \rho_0 w_i \sum_{j=1}^{2} U_{ij}^*(t)dv \\ &-\int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_i}\left\{r_{\bar{i}}\, p(t+\Delta t) + P_{\bar{i}}^*(t)\right\}dv = \\ &-\int_S w_i n_i \left\{r_{\bar{i}}\, p(t+\Delta t) + P_{\bar{i}}^*(t)\right\}ds\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、$r_{12}=k_1k_2+\theta\Delta t(k_2\sigma_1+k_1\sigma_2), r_{\bar{i}}=k_{\bar{i}}+\theta\Delta t\sigma_{\bar{i}}$,
である。式(10)を代入して次式を得る。

$$r_{12}\rho(t+\Delta t)+R_{12}(t)=-\rho_0\sum_i r_{\bar{i}}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(t+\Delta t)-V_{12}(t) \tag{12}$$

$$r_{12}\rho(t+\Delta t)=-\rho_0\sum_i r_{\bar{i}}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(t+\Delta t)-R_{12}(t)-V_{12}(t) \tag{13}$$

式(13)と式(9)から式(3’a)を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}&\int_V q\left\{r_{12}\,p(t+\Delta t)+\rho_0 c^2\sum_j r_{\bar{j}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(t+\Delta t)\right\}dv \\ &=-\int_V qc^2\left\{R_{12}(t)+V_{12}(t)\right\}dv\end{aligned} \tag{14}$$

さて、要素に分割したとして、要素の節点における変位からなるベクトルを$\mathbf{u}^e$、要素中の変位ベクトル$\mathbf{u}$と$\mathbf{u}^e$の関係を表す形状関数からなるマトリックスを$\mathbf{N_s}$（即ち$\mathbf{u}=\mathbf{N_s}\,\mathbf{u}^e$）、要素の節点の圧力からなるベクトルを$\mathbf{P^e}$、要素中の圧力$p$と$\mathbf{P^e}$の関係を表す形状関数からなるマトリックスを$\mathbf{N_p}$とする。ガラーキン法を用いることとして(重み関数と形状関数が同一)、次式を得る。

$$\begin{aligned}&\rho_0\int_V r_{12}\mathbf{N_s}^T\mathbf{N_s}dv\Delta\ddot{\mathbf{u}}^e+\rho_0\int_V r_{12}\mathbf{N_s}^T\mathbf{N_s}dv\ddot{\mathbf{u}}^e(t)+\rho_0\int_v\mathbf{N_s}^T\mathbf{U}(t)dv \\ &-\int_V\mathbf{B}^T\mathbf{R}_m\mathbf{N_p}dv\Delta\mathbf{P^e}-\int_V\mathbf{B}^T\mathbf{R}_m\mathbf{N_p}dv\mathbf{P^e}(t)-\int_V\mathbf{B}^T\mathbf{S}dv\mathbf{P}(t) \\ &=-\int_S\mathbf{N_s}^T\mathbf{N}\mathbf{R}_m\mathbf{N_p}ds\mathbf{P^e}(t+\Delta t)-\int_S\mathbf{N_s}^T\mathbf{N}\mathbf{S}ds\mathbf{P}(t)\end{aligned} \tag{15}$$

ただし、

$\Delta\ddot{\mathbf{u}}^e=\ddot{\mathbf{u}}^e(t+\Delta t)-\ddot{\mathbf{u}}^e(t),\quad \Delta\mathbf{P^e}=\mathbf{P^e}(t+\Delta t)-\mathbf{P^e}(t)$ である。式(14)からは次式を得る。

$$\begin{aligned}&\int_V r_{12}\mathbf{N_p}^T\mathbf{N_p}dv\Delta\mathbf{P^e}+\int_V r_{12}\mathbf{N_p}^T\mathbf{N_p}dv\mathbf{P^e}(t) \\ &+\rho_0c^2\beta_0^2\int_V\mathbf{N_p}^T\mathbf{R}_m^T\mathbf{B}dv\Delta\mathbf{u}^e+\rho_0c^2\beta_0^2\int_V\mathbf{N_p}^T\mathbf{R}_m^T\mathbf{B}dv\mathbf{u}^e(t)=\mathbf{R}'(t)\end{aligned} \tag{16}$$

ここで

$$\Delta\mathbf{P^e}=-\rho_0c^2\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}^e-\mathbf{P^e}(t)-\rho_0c^2\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{u}^e(t)+\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}(t) \tag{17}$$

同様に式(16)から次式を得る。

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{P^e}=&-\rho_0c^2\beta_0^2\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}^e-\mathbf{P^e}(t) \\ &-\rho_0c^2\beta_0^2\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{u}^e(t)+\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}'(t)\end{aligned} \tag{18}$$

しかし応力としては圧力のみが考慮されているので、$\mathbf{G}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}$は、多くのアワーグラスモードをもっており、計算が不安定になる可能性がある。ところで、粘性のない流体は、渦度$\varepsilon_c=\partial u_2/\partial x_1-\partial u_1/\partial x_2$が時間的に変化しないという特性がある。最初流体が静止しているものとすれば渦度は0であるので、渦度は常に0となる。これを陽な拘束条件として加える。すなわち、振動数領域で式(4)の座標変換後の形式で示せば

$$\lambda_1\lambda_2\bar{\varepsilon}_c=\lambda_2\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1}-\lambda_1\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2} \tag{19}$$

$$\lambda_2\frac{\partial\bar{\varepsilon}_c}{\partial x_1}=\lambda_1\frac{\partial\bar{\varepsilon}_c}{\partial x_2}=0 \tag{20}$$

ここで$\bar{\varepsilon}_c$はε_cの振動数領域の振幅である。式(19)を時間領域に変換し、畳みこみ積分の近似式(10)を用いれば次式の様に書ける。

$$\begin{aligned}&r_{12}\varepsilon_c(t+\Delta t)+\sum_{j=1}^{2}\frac{k_{\bar{j}}\sigma_j(\alpha_{\bar{j}}-\alpha_j)+\sigma_1\sigma_2}{\alpha_{\bar{j}}-\alpha_j}E_j^*(t) \\ &=\left\{r_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(t+\Delta t)+U_{21}^*(t)\right\}-\left\{r_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(t+\Delta t)+U_{12}^*(t)\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

ここで、

$$\mathrm{E}_j^*(t)=e^{-\alpha_j\Delta t}\left\{\mathrm{E}_j^*(t-\Delta t)+\Delta t\varepsilon_c(t)\right\}$$

$$U_{12}^*(t)=e^{-\alpha_1\Delta t}\left\{U_{12}^*(t-\Delta t)+\Delta t\sigma_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(t)\right\},$$

$$U_{21}^*(t)=e^{-\alpha_2\Delta t}\left\{U_{21}^*(t-\Delta t)+\Delta t\sigma_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(t)\right\}$$

従って

$$\varepsilon_c(t+\Delta t)=\frac{1}{r_{12}}\left\{r_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(t+\Delta t)-r_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(t+\Delta t)+E(t)\right\} \tag{22}$$

ただし

$$E(t)=-\sum_{j=1}^{2}\frac{k_{\bar{j}}\sigma_j(\alpha_{\bar{j}}-\alpha_j)+\sigma_1\sigma_2}{\alpha_{\bar{j}}-\alpha_j}E_j^*(t)+U_{21}^*(t)-U_{12}^*(t)$$

である。

重み関数w_1, w_2を乗じて積分すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned}&-\int_V\alpha\left(w_2\lambda_2\frac{\partial\bar{\varepsilon}_c}{\partial x_1}-w_1\lambda_1\frac{\partial\bar{\varepsilon}_c}{\partial x_2}\right)dv \\ &=-\int_S\alpha\left(w_2n_1\lambda_2-w_1n_2\lambda_1\right)\bar{\varepsilon}_c ds+\int_V\alpha\left(\lambda_2\frac{\partial w_2}{\partial x_1}-\lambda_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)\bar{\varepsilon}_c dv=0\end{aligned} \tag{23}$$

式(23)を時間領域に変換すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}&\int_V\alpha\left(r_2\frac{\partial w_2}{\partial x_1}-r_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)\varepsilon_c dv+\int_V\alpha\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\sigma_2E_2^*-\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\sigma_1E_1^*\right)dv \\ &=\int_S\alpha\left\{\left(w_2n_1r_2-w_1n_2r_1\right)\varepsilon_c+\left(w_2n_1\sigma_2E_2^*-w_1n_2\sigma_1E_1^*\right)\right\}ds\end{aligned}$$

これに式(22)を代入し、形状関数を導入して次式を得る。

$$\begin{aligned}&\int_V\frac{\alpha}{r_{12}}\mathbf{B_c}^T\mathbf{B_c}dv\Delta\mathbf{u}^e=-\int_V\alpha\mathbf{B_e}^T\begin{Bmatrix}E_1^*\\E_2^*\end{Bmatrix}dv-\int_V\frac{\alpha}{r_{12}}\mathbf{B_c}^TE(t)dv \\ &\qquad-\int_V\frac{\alpha}{r_{12}}\mathbf{B_c}^T\mathbf{B_c}dv\mathbf{u}^e(t)\end{aligned} \tag{24}$$

式(11)を変えると次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\rho_0\int_v r_{12}\mathbf{N_s}^T\mathbf{N_s}dv\mathbf{u}^e(t+\Delta t)+\left(\rho_0c^2\beta_0^2\mathbf{G}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}+\int_V\frac{\alpha}{r_{12}}\mathbf{B_c}^T\mathbf{B_c}dv\right)\mathbf{u}^e(t+\Delta t) \\ &=-\int_S\mathbf{N_s}^T\mathbf{N}\mathbf{R}_m\mathbf{N}_p ds\mathbf{P^e}(t+\Delta t)-\int_S\mathbf{N_s}^T\mathbf{N}\mathbf{S}ds\mathbf{P}(t)-\rho_0\int_v r_{12}\mathbf{N_s}^T\mathbf{N_s}dv\ddot{\mathbf{u}}^e(t) \\ &+\mathbf{G^T}\mathbf{P^e}(t)-\left(\rho_0c^2\mathbf{G^T}\mathbf{H^{-1}}\mathbf{G}+\int_V\frac{\alpha}{r_{12}}\mathbf{B_c}^T\mathbf{B_c}dv\right)\mathbf{u}^e(t)+\mathbf{G}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}'(t) \\ &\quad-\rho_0\int_v\mathbf{N_s}^T\mathbf{U}(t)dv+\int_V\mathbf{B}^T\mathbf{S}dv\mathbf{P}(t)-\int_V\alpha\mathbf{B_e}^T\begin{Bmatrix}E_1^*\\E_2^*\end{Bmatrix}dv-\int_V\frac{\alpha}{r_{12}}\mathbf{B_c}^TE(t)dv\end{aligned} \tag{25}$$