O-11

スピンをもつ有質量粒子の正準形式

Canonical formalism of massive spinning particles

○岡野諭[1]，根岸翔馬[1]，出口真一[2]
*Satoshi Okano[1], Shoma Negishi[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We study canonical formalism of massive spinning particles written in terms of commuting spinor variables. Canonical quantization of this system is performed on the basis of the Dirac quantization procedure.

１．導入

これまでに，スピンをもつ粒子の古典力学的な記述とその量子化について様々な模型が提案され，それに関する研究がなされてきた．例えば，反可換数を用いた模型として spinning particle や super particle が知られている．また，可換なスピナー変数を用いた模型としては剛体模型が知られている．本研究ではツイスター形式を背景にとり，スピンをもつ有質量粒子を記述する模型を構築してそれを考察する．

我々は相対論的自由粒子の Lagrangian を出発点にして，スピナー表現でのスピンをもつ有質量粒子の Lagrangian を与える．これを基に Dirac の手法に従って正準形式を構成する．このときに得られる第一次拘束条件と第二次拘束条件を第一類と第二類に分類した後，第二類拘束条件に関しては，Dirac 括弧を定義して正準変数を減らすことで処理する．第一類拘束条件に関しては，Dirac 括弧を基に量子化した後，物理的状態を定義する条件として読み換える．これを波動方程式として表現し，それを解くことでスピンをもつ自由粒子の平面波解を導く．また，これを基に，特別な場合として Dirac 方程式を導出する．さらに，この系における Pauli-Lubanski ベクトルを考察する．

２．有質量粒子のスピナー表現

４次元時空における相対論的粒子の軌道を固有時間 τ の関数として $x^\mu(\tau)$ $(\mu=0,1,2,3)$ と表す．質量 m の相対論的自由粒子の Lagrangian は $L_1=-m\sqrt{\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu}$ $(\dot{x}^\mu\equiv\frac{dx^\mu}{d\tau})$ である．補助変数 $f(\tau)$ と $p_\mu(\tau)$ を導入し，L_1 を $L_2=-p_\mu\dot{x}^\mu+\frac{1}{2}f(p_\mu p^\mu-m^2)$ と書き換える．ここで，x^μ と p_μ のスピナー表現 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ $(\alpha=0,1;\dot{\alpha}=\dot{0},\dot{1})$ を用いると，L_2 は次のように書ける：

$$L_2=-p_{\alpha\dot{\alpha}}\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}+\frac{1}{2}f(p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\alpha\dot{\alpha}}-m^2)\ . \tag{1}$$

ここでツイスター形式に従い，$p_{\alpha\dot{\alpha}}$ を２種類の２成分スピナー $\bar{\pi}^i{}_\alpha(\tau)\,(i=1,2)$ とその複素共役 $\pi_{i\dot{\alpha}}(\tau)$ を用いて，$p_{\alpha\dot{\alpha}}=\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}$ と表す [1]．これを式 (1) に代入すると，次式が得られる：

$$L_2=-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}+\frac{1}{2}f(\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{k\alpha}\pi_k^{\dot{\alpha}}-m^2)\ . \tag{2}$$

次に，スピンをもつ粒子を記述するために，新たなスピナー $\psi_i{}^\alpha(\tau)$ と $\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}(\tau)$ を導入し，式 (2) を

$$\begin{aligned}L=&-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}+\frac{f}{2}(\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{k\alpha}\pi_k{}^{\dot{\alpha}}-m^2)\\&-i(\psi_i{}^\alpha\dot{\bar{\pi}}^i{}_\alpha-\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{i\dot{\alpha}})-\frac{a}{2}(\psi_i{}^\alpha\bar{\pi}^i{}_\alpha+\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}\pi_{i\dot{\alpha}}+2s)\ .\end{aligned} \tag{3}$$

と修正する．ここで，$a(\tau)$ は新たな補助変数であり，s は実定数である．式 (3) は添字 i に関する SU(2) 変換 $\bar{\pi}^i{}_\alpha\to\bar{\pi}'^i{}_\alpha=U^i{}_j\bar{\pi}^j{}_\alpha$，$\pi_{i\dot{\alpha}}\to\pi'_{i\dot{\alpha}}=U^\dagger{}_i{}^j\pi_{j\dot{\alpha}}$ (U : 2×2 ユニタリー行列) のもとで不変である．従って，この系は Poincaré 対称性に加え，SU(2) 対称性を持つ．以下，この Lagrangian を基にした正準形式を論じる．

３．Dirac の手法による正準形式

式 (3) に含まれる正準座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}},\bar{\pi}^i{}_\alpha,\pi_{i\dot{\alpha}},\psi_i{}^\alpha,\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}},f,a)$ に対する正準運動量を $(P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}},P_{(\bar{\pi})i}{}^\alpha,P_{(\pi)}{}^{i\dot{\alpha}},P_{(\psi)}{}^i{}_\alpha,P_{(\bar{\psi})i\dot{\alpha}},P_{(f)},P_{(a)})$ と表す．式 (3) より，次の第一次拘束条件が得られる：

$$\begin{aligned}&\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}\equiv P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}+\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}\approx0,\ \phi_{(\psi)}{}^i{}_\alpha\equiv P_{(\psi)}{}^i{}_\alpha\approx0\ ,\\&\phi_{(\bar{\pi})i}{}^\alpha\equiv P_{(\bar{\pi})i}{}^\alpha+i\psi_i{}^\alpha\approx0,\ \phi_{(\bar{\psi})i\dot{\alpha}}\equiv P_{(\bar{\psi})i\dot{\alpha}}\approx0\ ,\\&\phi_{(\pi)}{}^{i\dot{\alpha}}\equiv P_{(\pi)}{}^{i\dot{\alpha}}-i\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}\approx0,\ \phi_{(f)}\equiv P_{(f)}\approx0\ ,\\&\phi_{(a)}\equiv P_{(a)}\approx0\ .\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\approx$ は弱い等号を表す．また，第一次拘束条件 (4) の時間発展を考えることで，次の第二次拘束条件を得る：

$$\begin{aligned}&\chi_{(f)}\equiv\frac{1}{2}(\bar{\pi}^i{}_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{k\alpha}\pi_k^{\dot{\alpha}}-m^2)\approx0\ ,\\&\chi_{(a)}\equiv\psi_i{}^\alpha\bar{\pi}^i{}_\alpha+\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}\pi_{i\dot{\alpha}}+2s\approx0\ .\end{aligned} \tag{5}$$

これらに対して詳細な考察を行うと，$\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$, $\phi_{(f)}$, $\phi_{(a)}$, $\chi_{(f)}$, $\chi_{(a)}$ は第一類拘束条件であり，$\phi_{(\bar{\pi})i}{}^\alpha$, $\phi_{(\pi)}{}^{i\dot{\alpha}}$, $\phi_{(\psi)}{}^i{}_\alpha$, $\phi_{(\bar{\psi})i\dot{\alpha}}$ は第二類拘束条件であることが分かる．第二類拘束条件から構成される Dirac 括弧のもとで，これらの弱い等号は強い等号 (=) となる．このとき $\psi_i{}^\alpha$ と $\bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}$ はそれぞれ $\bar{\pi}^i{}_\alpha$ と $\pi_{i\dot{\alpha}}$ の共役運動量とみなされる．結果として，０でない Dirac 括弧は次の５つとなる：

$$\begin{aligned}&\{x^{\alpha\dot{\alpha}},P^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\}_{\rm D}=\delta^\alpha{}_\beta\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}},\ \{f,P_{(f)}\}_{\rm D}=1,\\&\{\bar{\pi}^i{}_\alpha,\psi_k{}^\beta\}_{\rm D}=i\delta^i{}_k\delta_\alpha{}^\beta,\ \{a,P_{(a)}\}_{\rm D}=1,\\&\{\pi_{i\dot{\alpha}},\bar{\psi}^{k\dot{\beta}}\}_{\rm D}=-i\,\delta_i{}^k\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}.\end{aligned} \tag{6}$$

[1] 日大理工・院・量子　[2] 日大・量科研

4．正準量子化

Dirac の手法に従い，Dirac 括弧 (6) を正準交換関係に置き換える：$[\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{P}^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}] = i\hbar\delta^{\alpha}{}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$，$[\hat{f}, \hat{P}_{(f)}] = i\hbar$，$[\hat{\bar{\pi}}^{i}{}_{\alpha}, \hat{\psi}_{k}{}^{\beta}] = -\hbar\delta^{i}{}_{k}\delta_{\alpha}{}^{\beta}$，$[\hat{a}, \hat{P}_{(a)}] = i\hbar$，$[\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\psi}}^{k\dot{\beta}}] = \hbar\delta_{i}{}^{k}\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$．これらより，各演算子は次のように表現される：

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}},\ \hat{P}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}},\\
&\hat{\bar{\pi}}^{i}{}_{\alpha} = \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha},\ \hat{\psi}_{i}{}^{\alpha} = \hbar\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}},\ \hat{f} = f,\ \hat{P}_{(f)} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial f},\\
&\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}} = \pi_{i\dot{\alpha}},\ \hat{\bar{\psi}}^{i\dot{\alpha}} = -\hbar\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}},\ \hat{a} = a,\ \hat{P}_{(a)} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial a}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

量子化の後，上で得られた 5 つの第一類拘束条件は物理的状態 $|\Psi\rangle$ を定める次のような条件と解釈される：$\hat{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}|\Psi\rangle = 0$，$\hat{\phi}_{(f)}|\Psi\rangle = 0$，$\hat{\phi}_{(a)}|\Psi\rangle = 0$，$\hat{\chi}_{(f)}|\Psi\rangle = 0$，$\hat{\chi}_{(a)}|\Psi\rangle = 0$．式 (7) の表現を取ると，これらの条件は波動関数 $\Psi = \Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}, \pi_{i\dot{\alpha}}, f, a)$ が満たす次の連立方程式になる：

$$
-i\hbar\frac{\partial}{\partial f}\Psi = 0\ , \tag{8}
$$

$$
-i\hbar\frac{\partial}{\partial a}\Psi = 0\ , \tag{9}
$$

$$
\left[\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{k\alpha}\pi^{\dot{\alpha}}_{k} - m^{2}\right]\Psi = 0\ , \tag{10}
$$

$$
\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} + \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}\right]\Psi = 0\ , \tag{11}
$$

$$
\left[\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}} - \pi_{i\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}} + 2\frac{s}{\hbar}\right]\Psi = 0\ . \tag{12}
$$

式 (8) と式 (9) から Ψ は f と a に依存しないことがわかる．式 (10) は質量殻条件が量子論においても成り立つことを保障する．これらを踏まえ，式 (11) を解くと，平面波解 $\Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}, \pi_{i\dot{\alpha}}) = \Lambda(\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}, \pi_{i\dot{\alpha}})\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}}$ が導かれる．さらに，この解を式 (12) に代入すると次式が得られる：

$$
\left[\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}} - \pi_{i\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}} + 2\frac{s}{\hbar}\right]\Lambda(\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}, \pi_{i\dot{\alpha}}) = 0\ . \tag{13}
$$

これを解いて上の平面波解に代入すると，方程式 (8)–(12) の解として，次のような平面波解が得られる：

$$
\Psi = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}}\quad (s = 0), \tag{14}
$$

$$
\Psi^{i_1\cdots i_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \prod_{k=1}^{n}\bar{\pi}^{i_k}{}_{\alpha_k}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}}\quad\left(s = -\frac{\hbar}{2}n\right), \tag{15}
$$

$$
\Psi_{i_1\cdots i_n,\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_n} = \prod_{k=1}^{n}\pi_{i_k\dot{\alpha}_k}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}}\quad\left(s = \frac{\hbar}{2}n\right). \tag{16}
$$

このとき n は自然数のみが許され，従って s は $\hbar/2$ を基本単位として量子化されることがわかる．

特に，$n = 1$ の場合における解 (15) と (16) を式 (11) に代入し，$\Phi^{i\dot{\alpha}} \equiv \mathrm{e}^{i\theta}\epsilon^{ik}\Psi_{k}{}^{\dot{\alpha}}$ と定義すると，$\Psi^{i}{}_{\alpha}$ と $\Phi^{i\dot{\alpha}}$ に対する次の連立方程式が得られる：

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\dot{\alpha}}}\Psi^{i}{}_{\alpha} + \frac{m}{\sqrt{2}}\Phi^{i\dot{\alpha}} = 0,\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}\Phi^{i\dot{\alpha}} + \frac{m}{\sqrt{2}}\Psi^{i}{}_{\alpha} = 0\ . \tag{17}
$$

上式において，$i = 1$ と $i = 2$ の 2 つの場合は，解の持つ性質 $\overline{\Psi^{i}{}_{\alpha}(x)} = \Psi_{i\dot{\alpha}}(-x)$ を考慮すると，互いに独立ではないことが示せる．結果として，式 (17) はカイラル表示の Dirac 方程式そのものであることがわかる．

5．Pauli-Lubanski ベクトルに関する考察

この系における Pauli-Lubanski スピンベクトルは，次のように得られる：

$$
W^{\alpha\dot{\alpha}} = -S_{r}(\tau_{r})^{k}{}_{i}\bar{\pi}^{i\alpha}\pi_{k}{}^{\dot{\alpha}}\ . \tag{18}
$$

但し，S_r は $-\frac{1}{4}\left(\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\psi_{k}{}^{\alpha} + \bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}\pi_{k\dot{\alpha}}\right)(\tau_r)^{k}{}_{i}$ と定義される．また，$\tau_r\ (r = 1, 2, 3)$ は Pauli 行列である．式 (18) を用いると，スピンの大きさの 2 乗は次のように求まる：

$$
W^{\alpha\dot{\alpha}}W_{\alpha\dot{\alpha}} = -m^{2}\boldsymbol{S}^{2}\quad(\boldsymbol{S}^{2} := S_{r}S_{r})\ . \tag{19}
$$

このとき，S_r 同士の Dirac 括弧は SU(2) 代数 $\{S_r, S_q\}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}\epsilon_{rqp}S_p$ を満たすことから，式 (18) にある Pauli-Lubanski ベクトルが内部対称性の SU(2) 生成子を用いて記述されていることが分かる．

6．まとめと今後の課題

本研究では，可換なスピナー変数を用いてスピンをもつ有質量粒子の Lagrangian を与え，これを基に正準形式を構成し，量子化を行った．導かれた波動方程式 (8)–(12) を解くことにより，整数または半整数スピンをもつ有質量自由粒子の平面波解を得た．また，特に $n = 1$ の場合に Dirac 方程式を導出した．一方，この模型において，Pauli-Lubanski ベクトル $W^{\alpha\dot{\alpha}}$ は内部対称性と考えられる SU(2) の生成子 S_r で記述されることがわかった．今後は，その物理的意味を調べる必要がある．

無質量粒子の場合には，パラメータ s が粒子のヘリシティを表すことが知られている [2, 3]．一方，有質量粒子に対する s の意味は明確ではないため，これを調べる必要がある．

参考文献

[1] R. Penrose, Rep. Math. Phys. **12** (1977), 65.

[2] T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. **70** (1983), 18.

[3] 根岸 翔馬, 2011 年度修士論文（日本大学）.