O-14

量子重力と κ-Minkowski 時空構造

κ-Minkowski Spacetime out of Quantum Gravity

○飯島健蔵[1]　仲滋文[2]
*Kenzo Iijima[1],Shigefumi Naka[2]

Abstract: The κ-Minkowski spacetime is a noncommutative spacetime preserving quantum gravity effect associated with a Planck energy scale parameter κ, which plays the role of an observer-independent kinematical scale other than c. The spacetime allows the symmetry under the operation so-called κ -Poincare algebra, which was historically introduced as a contracting limit of $SO_q(3,1)$ algebra. In this work, we investigate this limiting process in relation with the quantum gravity in 2+1 dimension, which is equivalent to Chern-Simons theory with $SO(3,1)$ symmetry.

1．はじめに

κ-Minkowski 時空は，プランク・エネルギーの大きさを持つ定数 κ を光速 c とは別の座標系に依存しない自然定数として組み込んだ時空模型であり，量子重力の痕跡を残した非可換時空模型の一つとして考えられている. κ に依存する非可換性の効果は，プランク・エネルギーに近い高エネルギー状態では顕著に現れるが，量子重力との関連性は自明ではない. 本研究では,[1] に従って 2+1 次元での量子重力とそこから考えられる $SO(3,1)$ Chern-Simons 作用の関係を基礎におき, その形式に内在する SO_q(3,1) 量子対称性を考慮し,κ-Minkowski 時空を特徴付ける代数の構築を考えていく. 具体的な手順としては, 定義した代数関係の漸近形の取り方を考え Poincare 代数を導いたのち,κ-Poincare 変換を満たすような代数関係の設定について考察していく.

2．κ-Minkowski 時空の基本構造

κ-Minkowski 時空は, 交換関係

$$[\hat{x}^0,\hat{x}^i]=\frac{i}{\kappa}\hat{x}^i \tag{1}$$

$$[\hat{x}^i,\hat{x}^j]=0 \tag{2}$$

で特徴付けられる非可換時空である. このような構造は時空に埋め込まれた粒子について, 以下の変形された分散関係を満たす.

$$E^2=p^2+m^2+\alpha l_p E^3+\beta {l_p}^2 E^4+\cdots \tag{3}$$

この分散関係は Poincare 変換の下で不変ではないが,(3) 式の展開がある種の関数にまとまる場合，κ-Poincare 変換の下で不変となる. その変換は, 光速 c とともに定数 κ を普遍定数として含むものであり, この意味で κ-Minkowski 時空は特殊二重相対論 (Double Special Relativity) の構造を持つ時空として知られている.

(1), (2) 式の非可換性の捉え方として, しばしば

$$\lim_{G,\Lambda\to 0}\sqrt{\frac{G}{\Lambda}}=\kappa^{-1}\neq 0 \tag{4}$$

の意味での量子重力の残留効果という考え方が提唱されている. ただし, このような極限は量子重力の構成と関係し, 必ずしも明確な議論はなされていない. 以下では,Chern-Simons ゲージ理論と等価な 2+1 次元量子重力の模型を基礎として, (4) 式の極限がどのような意味で実現されるかを検証する.

3．2+1 次元での量子重力

宇宙定数 $\Lambda\neq 0$ の場合,2+1 次元量子重力理論は, 以下の作用積分を基礎に構築される.

$$S=-\frac{1}{2G}\int(d\omega^{ij}-\omega^i{}_k\wedge\omega^{kj}-\Lambda e^i\wedge e^j)\wedge e^l\epsilon_{ijl}, \tag{5}$$

$(i,j=0,1,2)$. ここで, ω^{ij} は SO(2,1) の接続, e^i は 3 脚子である. この作用から導かれる運動方程式は

$$d\omega^{ij}-\omega^i{}_k\wedge\omega^{kj}-3\Lambda e^i\wedge e^j=0 \tag{6}$$

となり, 定曲率の時空構造が導かれる. (5) 式の作用は $A^{ij}=\omega^{ij}$,$A^{i3}=\sqrt{3\Lambda}e^i$ として書き換えていくと, 以下のような Chern-Simons 作用の形になる.

$$S=\frac{\kappa}{4\pi}\int(dA^{ab}-\frac{2}{3}A^a{}_t\wedge A^{tb})\wedge A^{cd}\epsilon_{abcd}, \tag{7}$$

[1] 日大理工・院（前）・物理
[2] 日大理工・教員・物理

$(a,b=0,1,2,3$, $\kappa=(l_p\sqrt{\Lambda})^{-1})$. (7) 式の Chern-Simons 作用は, ω^{ij} , e^i 間の変換を含めた SO(3,1) あるいは SO(2,2) の群構造をもつ.

ゲージ場 A^{ij} は,(7) 式の作用を用いて正準量子化され, 以下の交換関係が導かれる.

$$[{A_\alpha}^{ab}(x),{A_\beta}^{cd}(y)]=\frac{2\pi i}{\kappa}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{abcd}\delta^2(x,y) \qquad (8)$$

4．2+1 次元における κ-Poincare 代数の導出

実際には 2+1 次元は特殊であり, ${A_\alpha}^{ab}$ の SO(3,1) 対称性は時空のホモトピー構造のために破れていて, 生成子の交換関係は以下のような q 変形された形になることが知られている [2].

$$\begin{aligned}
&[M_{2,3},M_{1,3}]=\frac{1}{z}\sinh(zM_{1,2})\cosh(zM_{0,3})\\
&[M_{2,3},M_{1,2}]=M_{1,3}\cdots etc.
\end{aligned} \qquad (9)$$

(8) 式の交換関係は,(9) 式の代数のパラメータ z を 0 に近づけた漸近構造と結びつく. この漸近空間は, 定曲率の座標空間 $(y^0)^2+(y^1)^2+(y^2)^2-(y^3)^2=(\kappa^{-1})^2$ で表現され, 生成子 $M_{\mu\nu}$ とエネルギー E, 運動量 P_i, M, N_i の対応関係が次のように与えられる.

$$\begin{aligned}
&E=\sqrt{\Lambda}M_{0,3}\quad (\sim i\frac{\partial}{\partial y^3}\ \text{for}\ \kappa\sim 0)\\
&P_i=\sqrt{\Lambda}M_{0,i}\quad (\sim i\frac{\partial}{\partial y^i}\ \text{for}\ \kappa\sim 0)\\
&M=M_{1,2}\\
&N_i=M_{i,3}
\end{aligned} \qquad (10)$$

(9) 式の生成子に (10) 式の意味を持たせる漸近操作を矛盾なく行うためには, 以下のようにパラメータ z と Λ の比を κ に固定し,

$$\kappa^{-1}=\frac{z}{\sqrt{\Lambda}}=l_p \quad (z\to 0\ \text{に次いで}\ \Lambda\to 0) \qquad (11)$$

の手順をとる. ただし, $\kappa\sim 0$ で同じ (y^0,y^i) の解釈を考える (E,P_i) と $(M_{0,3},M_{0,i})$ の対応は (10) 式の形に限らず, 次のような対応も可能である.

$$\begin{aligned}
&E=\sqrt{\Lambda}M_{0,3}\\
&P_1=e^{-\frac{z}{2}M_{0,3}}\sqrt{\Lambda}M_{0,1}\\
&N_1=e^{-\frac{z}{2}M_{0,3}}(-\frac{z}{2}M_{1,2}M_{0,2}+M_{1,3})\\
&N_2=e^{-\frac{z}{2}M_{0,3}}(-\frac{z}{2}M_{1,2}M_{0,1}+M_{2,3})\cdots etc.
\end{aligned} \qquad (12)$$

この場合,(11) 式の手順により, 以下の交換関係が導かれる.

$$\begin{aligned}
[N_2,N_1]&=\big[e^{-\frac{z}{2}M_{0,3}}(-\frac{z}{2}M_{1,2}M_{0,1}+M_{2,3})\\
&\qquad ,e^{-\frac{z}{2}M_{0,3}}(-\frac{z}{2}M_{1,2}M_{0,2}+M_{1,3})\big]\\
&=e^{zM_{0,3}}\times\frac{1}{z}\sinh(zM_{1,2})\cosh(zM_{0,3})+O(z)
\end{aligned} \qquad (13)$$

$$(\rightarrow\ M\ \text{for}\ \kappa\ \rightarrow\ \infty)$$

同様に, 他の交換関係も以下の形になる.

$$\begin{aligned}
&[M,N_i]=\epsilon_{ij}N^j\\
&[N_i,E]=P_i\\
&[N_2,P_2]=-\frac{1-e^{2l_pE}}{2l_p}-\frac{l_p}{2}{P_1}^2+\frac{l_p}{2}{P_2}^2\\
&[M,P_i]=\epsilon_{ij}P^j\cdots etc.
\end{aligned} \qquad (14)$$

(14) 式は, κ-Poincare 代数の構造に他ならず,(14) 式の得られた本質が,(8) 式よりもむしろ (9) 式にあることが分かる [3,4].

4．まとめと今後の課題

本研究では, 2+1 次元での κ-Minkowski 時空と量子重力の繋がりについて [1] に従って検証した. 基本となる q-代数 (9) 式は一般的には (8) 式との関連が示唆されているが, 必ずしも明確な議論はなされていない. そこで, 量子群を自明な起点とせず,(8) 式を起点として κ-Minkowski 時空の代数を導くことは, 今後の重要な課題である. また,2+1 次元以外での量子重力模型と κ-Minkowski 時空との繋がりについて検証していくことも, 興味深い課題である.

5．参考文献

[1] G.Amelino-Camelia,L.Smolin and A.Starodubtsev, http://arxiv.org/ abs/hep-th/0306134

[2] J.E.Nelson,T.Regge,Nucl.Phys.B339(1990)316

[3]S.Majid and H.Ruegg,Phys.Lett.B334(1994),348

[4]J.Lukierski,A.Nowicki and H.Ruegg,Ann.Phys.243 (1995)90-116