O-22

長距離相互作用するランダム磁場 Ising 模型の一次相転移

First-order phase transition in the random field Ising model with long-range interactions.

栗原真司[1]

○Shinji Kurihara[1]

The random field Ising model with long-range interaction has first-order transition and second-order transition. Here I study a random quenched magnetic field given by a binary distribution ($P_h = \delta(h_i - h_0)/2 + \delta(h_i + h_0)/2$). The system's first-order and second-order transitions are found out. The second-order transition is observed for T > 2/3, otherwise the first-order transition is observed. I consider a general case where the distribution of random quenched magnetic field is given by $P_h = \mathrm{p}\delta(h_i - h_0) + (1-\mathrm{p})\delta(h_i + h_0)$. In this case , the first-order transition survives, while the second order transition disappears.

ランダムな外部磁場が各スピンに掛かる長距離相互作用をする模型を考える。その模型のハミルトニアン$\mathrm{H} = -\frac{J}{2N}(\sum_{i=1}^{N} S_i)^2 - \sum_{i=1}^{N} h_i S_i$から定義される熱力学関数がどのような特異点を持つか調べる。Nはサイト数、$\mathrm{J}(>0)$は相互作用の強さ、S_iは各スピンで$S_i = \pm 1$、h_iは各サイトごとの外部磁場であり、h_0か$-h_0$のどちらかとなる。h_iの確率分布はP_hは$P_h = \mathrm{p}\delta(h_i - h_0) + (1-\mathrm{p})\delta(h_i + h_0)$とする。$\mathrm{p} = 1/2$の場合は$(h_0.T)$平面での相図が既に得られていて、一次転移線と二次転移線の存在が知られている。[1]その結果を踏まえつつ$\mathrm{p} = 1/2$以外の場合はどうなるのかを考えていく。分配関数$Z_N = \mathrm{Tr}\exp(-\beta\mathrm{H})$を計算していく。指数の肩に$\sum_{i=1}^{N} S_i$の二乗の項があると計算できないので、と積分に置き換える、すると

$$\exp\left\{\frac{\beta J}{2N}(\sum_{i=1}^{N} S_i)^2\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\beta J N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dm\, exp\left(-N\frac{\beta J m^2}{2} + \beta J m \sum_{i=1}^{N} S_i\right)$$

$$Z_N = \mathrm{Tr}\sqrt{\frac{\beta J N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dm \exp$$

$$\left[\left\{-\frac{N\beta J m^2}{2} + \beta\sum_{i=1}^{N}(Jm + h_i)S_i\right\}\right]$$

となります。　次に$\mathrm{Tr} = \sum_{S_1=\pm 1}\sum_{S_2=\pm 1}\dots\sum_{S_N=\pm 1}$ の計算を行う。

$$Z_N = \sqrt{\frac{\beta J N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dm \exp \mathrm{N}\left[-\frac{\beta J m^2}{2} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Log\{2\cosh\{\beta(Jm + h_i)\}\}\right]$$

$L_{\mathrm{p}}(m) = -\frac{\beta J m^2}{2} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Log[2\cosh\{\beta(Jm + h_i)\}]$とする。初めに一番知られている$\mathrm{p} = 1/2$の場合を考える。

$$L_{\frac{1}{2}}(m) = -\frac{\beta J m^2}{2} + \frac{1}{2}Log[2\cosh\{\beta(Jm + h_0)\}] +$$

$$\frac{1}{2}Log[2\cosh\{\beta(Jm - h_0)\}]$$

$$= -\frac{\beta J m^2}{2} + \frac{1}{2}Log[2\cosh(2\beta J m) + 2\cosh(2\beta h_0)]$$

鞍点法で積分を計算するので、鞍点条件$\frac{\partial}{\partial \mathrm{m}}L_{\frac{1}{2}}(m) = 0$となる$m_0$があるかどうかを調べる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial m}L_{\frac{1}{2}}(m)\right|_{m_0} = \beta J m_0 + \frac{\beta J \sinh(2\beta J m_0)}{\cosh(2\beta J m_0) + \cosh(2\beta h_0)} = 0$$

このm_0は$m_0 = J\langle S_i\rangle$となり、磁化に比例している。まずは一次転移の相境界を求める、そこでは磁化の飛びが現れるので、鞍点条件を満たす$m_0 \neq 0$に対し、$L_{\frac{1}{2}}(0) = L_{\frac{1}{2}}(m_0)$となる。よって

$$\frac{1}{2}Log\{2 + 2\cosh(2\beta h_0)\}$$

$$= -\frac{\beta J {m_0}^2}{2} + \frac{1}{2}Log\{2\cosh(2\beta J m_0) + 2\cosh(2\beta h_0)\}\ .$$

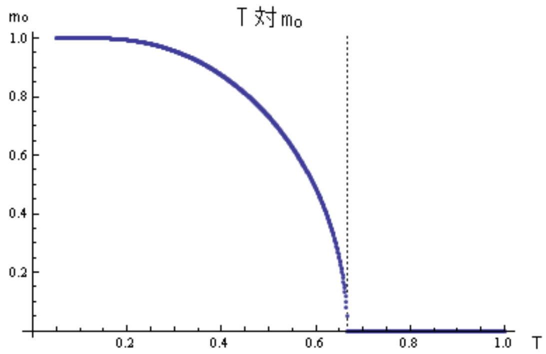
鞍点条件の式を代入してh_0を式から消去すると、次が得られる。

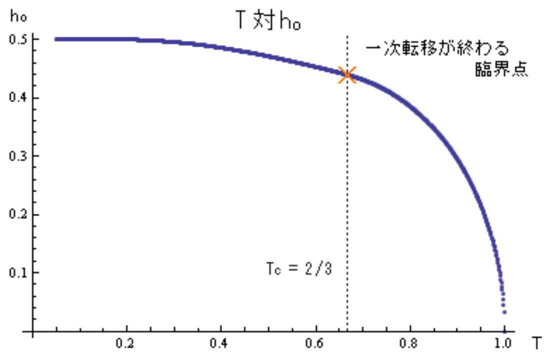
$$\beta J {m_0}^2 + Log\left\{\frac{1 + \frac{1}{m_0}\sinh(2\beta J m_0) - \cosh(2\beta J m_0)}{\frac{1}{m_0}\sinh(2\beta J m_0)}\right\} = 0$$

この式をm_0について解き、各m_0に対応する

1：日大理工・院（前）・物

h_0と $T=\frac{1}{\beta J}$の点を図示すると次の様になる。





$T<2/3$では$L_{\frac{1}{2}}(m)$の最大値を与える鞍点解が二つあることが分かる。また、一次転移の終わる臨界点は $T=0.666$で $m_0=0.049986268$、$h_0=0.43912429$と数値的に求まった。$T>2/3$では、$\frac{\partial^2}{\partial m^2}L_{\frac{1}{2}}(m)=0$の解が得られる事から二次転移が現れる事が分かる。一次転移では磁化が飛びを持つのに対し、二次転移では磁化が連続で磁化率が発散する。この模型には強磁性相と常磁性相が存在しスピングラス相は存在しない事が分かる。

次に $p=1/2$以外の場合を考える。この場合、二次転移線は消失するが、一次転移線が生き残ることが、次のようにしてわかる。まず、基底状態を調べることにより$T=0$、$h_0=p$で一次転移が起こる事が分かる。

有限温度での分配関数の肩は

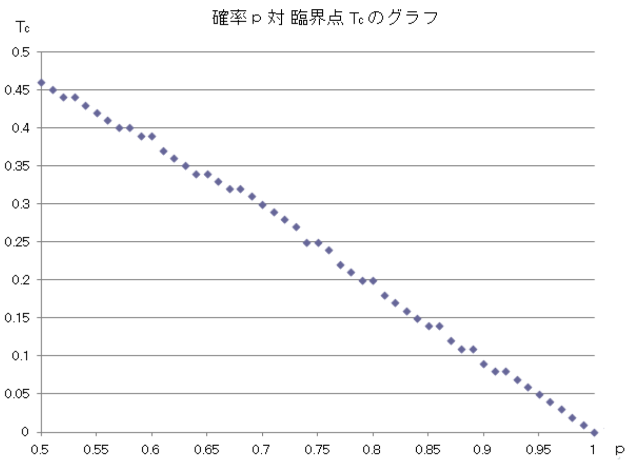
$$L_p(m)=L_{\frac{1}{2}}(m)-\frac{\beta J m^2}{2}+\left(p-\frac{1}{2}\right)Log[2\cosh\{\beta(Jm+h_0)\}]-\left(p-\frac{1}{2}\right)Log[2\cosh\{\beta(Jm-h_0)\}]$$

となり、1/2の場合と同様に鞍点条件について調べる。

$$\frac{\partial}{\partial m}L_p(m)=\frac{\partial}{\partial m}L_{\frac{1}{2}}(m)+\beta J\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{\sinh\{\beta(Jm+h_0)\}}{\cosh\{\beta(Jm+h_0)\}}-\beta J\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{\sinh\{\beta(Jm-h_0)\}}{\cosh\{\beta(Jm-h_0)\}}$$

$$=\beta Jm+\frac{\beta J\sinh(2\beta Jm)}{\cosh(2\beta Jm)+\cosh(2\beta h_0)}+\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)2\beta J\sinh(2\beta h_0)}{\cosh(2\beta Jm)+\cosh(2\beta h_0)}$$

$p=1/2$以外の場合は$L_p(0)=L_p(m_0)$とはならないので、任意のpで鞍点条件を満たす点m_1、m_2が$L_p(m_1)=L_p(m_2)$（$m_1<m_2$）となるT,h_0を数値計算で求めた。その結果$p=0.55$ではTに依らずおおよそ$h_0\fallingdotseq 0.55$で$L_p(m_1)=L_p(m_2)$となることが分かり、一次転移の存在は確認できた。他の値のpでも同様に数値計算をしたところ、Tに依らずおおよそ$h_0\fallingdotseq p$で$L_p(m_1)=L_p(m_2)$を満たす傾向があった。そこで、$h_0\fallingdotseq p$で$L_p(m_1)=L_p(m_2)$となると仮定し、精度は低くなるが、磁化の飛びが無くなる温度 Tcと確率pの対応を求めた。



実際には $p=1/2$に近づくと臨界点が絶対零度から離れていくため誤差が大きくなる。h_0の誤差は p の値が大きくなるにつれ、小さくなると予想される。以上により $p>1/2$でも一次転移が起こることが分かった。今後の課題として、$p>1/2$のとき一次転移が消失する点をより良い精度で求めることが挙げられる。

参考文献

[1].Tricritical points in systems with random field、Amnon Aharony、1977

[2].On the Mean-Field Ising Model in a Random External Field、S. R. Salinas and W. F. Wreszinski、1985