O-27

ツイスター関数族と無質量場の集合の完全性

Completeness of the set of massless fields constructed from twistor functions.

○野手 順一[1]

Jun-ichi Note

Abstract: Penrose has proposed twistor theory in 1967 as an approach to quantum gravity. In this theory, relativistic physics is described in twistor space instead of Minkowski space. Although this has not been succeeded enough, it has provided powerful tools for describing massless systems. For example, massless fields with arbitrary helicity s are constructed from homogeneous functions of degree $-2s-2$ on twistor space, called twistor functions, in a unified way. In this formulation, it is known that a set of the massless fields is equivalent to a space of the twistor functions. In this paper, it is investigated what kind of set of the massless fields plays a role of the complete basis.

１．はじめに

ツイスター理論は，量子重力への１つのアプローチとして１９６７年に Penrose によって提唱された．この理論では量子力学が複素数で記述されることに注目して，時空も複素数で記述することにより量子力学と相対論の融合を試みる．このため，相対論を記述する空間として Minkowski 空間と対応関係があるツイスター空間とよばれる３次元複素射影空間を導入する．

ツイスター空間の要素であるツイスターは，Weyl スピノル $(\omega^{\alpha})_{\alpha=0,1}$ と $(\pi_{\dot\alpha})_{\dot\alpha=\dot0,\dot1}$ の組であり次式のように定義される：

$$Z^A = (\,\omega^{\alpha},\,\pi_{\dot\alpha}\,),\quad A=0,1,2,3. \tag{1}$$

ここでツイスター空間の内積は

$$\bar Z_A Z^A = |\alpha^0|^2 + |\alpha^1|^2 - |\alpha^2|^2 - |\alpha^3|^2 =: ||\alpha||^2 \tag{2}$$

と与えられる．ただし，$\bar Z_A = (\,\bar\pi_{\alpha},\,\bar\omega^{\dot\alpha}\,)$, $A=0,1,2,3$,（ここで，$\bar\pi_{\alpha}$ と $\bar\omega^{\dot\alpha}$ はそれぞれ $\pi_{\dot\alpha}$ と ω^{α} の複素共役である.）はツイスター空間の双対空間の要素である．また，$\alpha^A\,(A=0,1,2,3)$ は $\bar Z_A Z^A$ を標準形にするような変数であり

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= \frac{1}{\sqrt2}\left(Z^0+Z^2\right), \quad \alpha^1 = \frac{1}{\sqrt2}\left(Z^1+Z^3\right),\\ \alpha^2 &= \frac{1}{\sqrt2}\left(Z^2-Z^0\right), \quad \alpha^3 = \frac{1}{\sqrt2}\left(Z^3-Z^1\right),\end{aligned} \tag{3}$$

と定義される．式 (2) を不変に保つようなツイスター空間上の線形変換は，Minkowski 空間上の非線形な共形変換に対応する．このことと無質量系は共形不変性をもっていることから，ツイスター理論は無質量系を記述することに優れている．例えば，任意のヘリシティをもつ無質量場を統一的に扱えること，Yang-Mills 方程式のすべてのインスタントン解を導出できること，グルーオンの散乱振幅の摂動計算を簡単にする手法をもたらすことなどが挙げられる．

任意のヘリシティ s をもつ無質量自由粒子の作用はツイスター変数 Z^A と $\bar Z_A$ をもちいると

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[i\bar Z_A\frac{dZ^A}{d\tau} + \rho(\bar Z_A Z^A - 2s)\right]d\tau \tag{4}$$

と表記される．ただし，τ はパラメータであり，ρ は補助変数である．この作用を基にして正準量子化の手続きを実行するとツイスター変数は演算子になり

$$\hat Z^A \doteq Z^A,\quad \hat{\bar Z}_A \doteq -\frac{\partial}{\partial Z^A}, \tag{5}$$

と表現される．次に式 (4) の作用 S を ρ で変分すると $\bar Z_A Z^A - 2s = 0$ という拘束条件が得られる．この拘束条件を量子化してかけて 0 になることを物理的状態に要請する．このような物理的状態はツイスター関数とよばれ，式 (3) で定義した変数 α^A をもちいると

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha^0)^k(\alpha^1)^l(\alpha^2)^m(\alpha^3)^n,\\ k+l+m+n &= -2s-2,\end{aligned} \tag{6}$$

[1]日大理工・院（後）・量子

と表される．この $f(\alpha)$ に１価性を課すとヘリシティ s は量子化されて半整数または整数となる．

２．ツイスター関数族から構成される無質量場の集合

式 (6) の $f(\alpha)$ を積分変換すると任意ヘリシティの無質量自由場方程式の解を統一的に構成できる．例えば，正ヘリシティ（$s = 1/2,\, 1,\, 3/2, \cdots$）の場合には

$$\phi_{\dot\alpha_1\dot\alpha_2\cdots\dot\alpha_{2s}}(z) = \oint_{C_z} \pi_{\dot\alpha_1}\pi_{\dot\alpha_2}\cdots\pi_{\dot\alpha_{2s}} f(\alpha)\pi_{\dot\delta} d\pi^{\dot\delta} \quad (7)$$

である．ここで，正エネルギーの場を構成するような $f(\alpha)$ はツイスター空間の部分領域 $\mathbb{PT}^+ := \{\,(\alpha^A)\,|\,||\alpha||^2 > 0\,\}$ 上で定義されている．この $\mathbb{PT}^+$ は正エネルギー場の定義域（複素化された Minkowski 空間 $\mathbb{CM}$ の部分領域）$\mathbb{CM}^+ := \{\,(z^\mu) \in \mathbb{CM}\,|\,z^\mu = x^\mu - iy^\mu,\, y^0 > 0,\, y_\mu y^\mu > 0\,\}$ に対応している．

このような量子化の理論形式における Hilbert 空間は，ツイスター関数 $f(\alpha)$ に内積を定義することにより構成される．この内積に関して，今までの定義ではノルムの性質や式 (5) の演算子の定義域などは不明であったが近年に著者らにより新しい内積の定義が提唱され，これらは明確にされた [1]．ここで，ツイスター理論では式 (6) 右辺の指数 $k,\, l,\, m,\, n$ の２つが負の整数で残りの２つが非負整数であるような $f(\alpha)$ が重要である．これは式 (7) の積分変換を実行するのに適した形であり，これから構成される場は elementary states とよばれる．このような $f(\alpha)$ は $k,\, l,\, m,\, n$ の値の範囲に応じて異なる性質をもつ．特に

$$k,\, l = -1,\, -2,\, -3, \cdots, \quad m,\, n = 0,\, 1,\, 2, \cdots, \quad (8)$$

の場合には，ノルムは正定値であり，式 (7) の積分変換により構成される正エネルギー場は特異点をもたない．他の場合には，ノルムは不定値であり，構成される場は特異点をもつ．ここで式 (8) の範囲に属するツイスター関数 $f(\alpha)$ は α^0 と α^1 のべきを分母にもつことから，ツイスター空間の部分領域 $U^0 := \{\,(\alpha^A) \in \mathbb{PT}^+\,|\,\alpha^0 \neq 0\,\}$ と $U^1 := \{\,(\alpha^A) \in \mathbb{PT}^+\,|\,\alpha^1 \neq 0\,\}$ の共通部分 $U^0 \cap U^1$ において正則であることがわかる．このような $f(\alpha)$ を基底として表される $(-2s-2)$ 次斉次の関数は，式 (7) の積分変換を受けることを考慮すると，１次チェックコホモロジー群 $H^1(U^0 \cap U^1,\, \mathcal{O}(-2s-2))$ の要素として扱われる：

$$H^1(U^0 \cap U^1,\, \mathcal{O}(-2s-2)) \simeq \left\{ \sum_{k,l,m,n} C_{klmn} \frac{(\alpha^2)^m(\alpha^3)^n}{(\alpha^0)^{-k}(\alpha^1)^{-l}} \,\middle|\, C_{klmn} \in \mathbb{C} \right\}. \quad (9)$$

これの要素は，式 (7) の積分変換により，ヘリシティ s の無質量場を構成する．このときに式 (7) 右辺の複素積分はツイスター空間の直線 $L_z \subset \mathbb{PT}^+$ 上で行われる．この L_z は複素 Minkowski 空間上の点 $z \in \mathbb{CM}^+$ に対応する．このため，構成される場の定義域は，$\mathbb{PT}^+$ の領域 $U^0 \cap U^1$ に対応する $\mathbb{CM}^+$ の領域 U である．したがって

$$H^1(U^0 \cap U^1,\, \mathcal{O}(-2s-2)) \simeq \{\text{定義域を } U \text{ とするヘリシティ } s \text{ の無質量場}\} \quad (10)$$

であることが証明される [2]．ここで，通常の場の理論においては，U 上で定義された正エネルギー場は

$$\{\,\exp(ik_\mu z^\mu)\,|\,(z^\mu) \in U,\, k^0 > 0,\, k_\mu k^\mu = 0\,\} \quad (11)$$

という平面波がなす完全系を基底として Fourier 展開される．本研究では，式 (8) の範囲に属するツイスター関数 $f(\alpha)$ から構成される場の集合が式 (11) と同型である（つまり完全系をなす）かどうかを調べる．これが同型でない場合にはどのようなツイスター関数族が完全系をなすような場の集合を構成するのかを調べる．

３．まとめと今後の課題

式 (7) によりツイスター空間上の関数（ツイスター関数）は Minkowski 空間上の無質量場に対応していることがわかる．このため，ツイスター関数空間の完全系は無質量場の集合の完全系に対応するべきであることが予想される．このことを踏まえてツイスター量子化の経路積分形式を構築する．

参考文献

[1] 野手 順一，出口 真一，平成 23 年度 日本大学理工学部 学術講演会論文集，1309.

[2] M. G. Eastwood, R. Penrose and R. O. Wells, Jr, Commun. Math. Phys. **78**, 305 (1981).