O-29

経路積分の問題

統計力学に応用できるか?

Problem in Path Integral

Can there apply in Statistical Mechanics ?

○望月　大生[1]

*Taiki Mochizuki[1]

The path integral in quantum mechanics can be obtained by integrating over meny dimensional coordinate . This path integral is justified for quantum mechanics . We should like to examine whether the path integral can be applied to statistical mechanics or not .

1 . 経路積分の表現

1 次元における量子力学の経路積分は, ハミルトニアン H によって

$$\mathrm{K}(x,\ x'\colon t) = <x'\,|\exp[-i\mathrm{H}t]|\,x> \tag{1}$$

から始まる. ハミルトニアン H を

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} + \mathrm{U}(x') = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathrm{U}(x') \tag{2}$$

で与える. ここで粒子の質量mはポテンシャル $\mathrm{U}(x)$に束縛されている. 今, $x'-x$の n 個の区間を作る. 従って, x=x_0,$x_1 \cdots x' = x_\mathrm{n}$として分類する. また

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_i\,|\,x_i><x_i\,|=1, \quad <x_i\,|\,p>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[ipx_i], \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp\,|\,p><p\,|=1 \tag{3}$$

を用いて, 更に$\Delta t = \frac{t}{n}$として, 量子力学の経路積分を計算する. この時

$$\mathrm{K}(x, x'\colon t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} < x'|\exp[-i\mathrm{H}\Delta t]|x_{n-1} >$$
$$<x_{n-1}|\exp[-i\mathrm{H}\Delta t]|x_{n-2}> \times \cdots \times <x_1|\exp[-i\mathrm{H}\Delta t]|> \tag{4}$$

例えば, 行列要素

$$<x_1|\exp[-i\mathrm{H}\Delta t]|\ x> \cong \exp[-i\mathrm{U}(x)\Delta t] < |\exp[-\frac{\Delta t}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}]|\ x> \ +\mathrm{O}((\Delta t))^2$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\Delta t}}\exp[-i\mathrm{U}(x)\Delta t]\exp[-\frac{im}{2\Delta t}(x-x_1)^2] \qquad (5)$$

を計算することにより, 結果は, n➔∞をとると

$$\mathrm{K}(x,\ x':t) = \lim_{n\to\infty}(\frac{m}{2i\pi\Delta t})^{\frac{n}{2}} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\,x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1}\exp[i\sum_{k=1}^{n}\{\frac{m}{2\Delta t}(x_k-x_{k-1})^2 - \mathrm{U}(x_k)\Delta t\}] \qquad (6)$$

を得る. 一方では

$$\mathrm{K}(x,\ x':t) = \ <x'|\exp[-i\mathrm{H}t]|\,x> = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\Psi(x)\Psi^*(x')\exp[-iE_n t] \qquad (7)$$

ただし, $\Psi(x)$と$\Psi^*(x')$はハミルトニアン H の固有関数で, E_nはエネルギー固有値である. (6), (7)の両辺を空間積分することにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\sum_{n=0}^{\infty}\Psi(x)\Psi^*(x')\exp[-iE_n t] \ = \sum_{n=0}^{\infty}\exp[-iE_n t]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1}\exp[i\sum_{k=1}^{n}\{\frac{m}{2\Delta t}(x_k-x_{k-1})^2 - \mathrm{U}(x_k)\Delta t\}] \qquad (8)$$

を得る. この経路積分では, 場の量子化によっているようには見えなく, 空間の切り方によってしまう. そして経路積分を統計力学として扱っていることがあるので, これから統計力学に応用できるかどうかを調査したい.

２．参考文献

Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory, Nova Science Publishers, Inc, No.2, pp.305, 2011