P−10

土倉・堀口法（村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）とその収束比較条件式

Tsuchikura-Horiguchi's method(Yoshimasu Murase-Newton type's first enhancing recurrence formula) and its convergence comparison in the conditional expressions

堀口俊二 *

Abstract：§1 は土倉・堀口法（村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）を説明する．
§2 は土倉・堀口法(*TH* 法)のいくつかの収束比較条件式を与える．

1. 土倉・堀口法（村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）

村瀬義益は『算法勿憚改』(1673)において，囲炉裏の太さ x の 2 乗 x^2 の漸化式を 2 種類与えた．村瀬は実際これらの漸化式を計算して囲炉裏の太さを求めた．これを拡張して土倉・堀口法が得られる．

定義 1.1　実変数 x の方程式 $f(x)=0$ の解(根) α の q 乗 α^q を近似する漸化式

$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (q\text{は}0\text{以外の実数定数}) \tag{1.1}$$

を**土倉・堀口(*TH*)法**(2009～2010)あるいは**村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式**という．特に $q=1$ のときニュートン法(1669,1690)となる．

土倉・堀口(*TH*)法の導出とグラフ

***TH* 法と接線**　$y=f(x)$ を $x^q=t$（q は 0,1 でない実数)により変換した関数を $y=g(t)$ とする．すなわち

$$g(t) := f(t^{1/q}) = f(x) \tag{1.2}$$

この関数は $g(x^q)=f(x)$ となるから，$y=f(x)$ を高さは変えないで x 軸方向に $x^q=t$ だけ伸縮したグラフとなる．$g(t)=0$ の $g(t)$ にニュートン法を適用すると，

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} = t_n - \frac{f(t_n^{1/q})}{f'(t_n^{1/q})\, \frac{1}{q}\, t_n^{1/q-1}} \tag{1.3}$$

となり，$x^q=t$ により変数 x にもどすと *TH* 法(1.1)が得られる．これは $y=g(t)$ のグラフの点 $(t_n, g(t_n))$ における接線の t 軸との交点 t_{n+1} を意味する．

村瀬が 1673 年にニュートン法の拡張と見られる漸化式の例を考案したことは，和算が世界に誇れることである．

定理 1.2

$$g''(t) = \frac{x f''(x) + (1-q) f'(x)}{q^2 x^{2q-1}} > 0\ (<0) \tag{1.4}$$

となる区間なら，$g(t)$ のグラフは下に凸(上に凸)となる．

定理 1.3　$y=f(x)$ の曲率 $\mu = \dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$ は $y=g(t)$ の曲率

$$\mu_q = \frac{g''(t)}{(1+g'(t)^2)^{3/2}} = \frac{\dfrac{xf''(x)+(1-q)f'(x)}{x}}{(qx^{q-1})^2\left(1+\left(\dfrac{f'(x)}{qx^{q-1}}\right)^2\right)^{3/2}} \tag{1.5}$$

に移る．特に $\mu_1 = \mu$ となる．

2. 土倉・堀口法(*TH* 法)のいくつかの収束比較条件式

定理 2.1　$f(\alpha)=0$，$q(\neq 0)$ を実数定数とする．$x_n \to \alpha$ のとき（すなわち根 α の近傍で)，*TH* 法は α が単根のとき

* 新潟産業大学

2 次収束する： $$|x_{n+1}^q-\alpha^q| \doteqdot \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\alpha f''(\alpha)+(1-q)f'(\alpha)}{\alpha f'(\alpha)}\right)q\alpha^{q-1}\right|(x_n-\alpha)^2 \qquad (2.1.1)$$

αが m 重根のとき $M=(1-1/m)|q\alpha^{q-1}|<1$ なら 1 次収束する： $|x_{n+1}^q-\alpha^q| \le M\,|x_n-\alpha|$　(2.1.2)

方程式 $f(x)=0$ を $h(x)=0$ に式変形する．この $h(x)$に対する *TH* 法は

$$x_{n+1}^r = x_n^r - r x_n^{r-1}\frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \qquad (2.2.1)$$

であり，αが単根のとき 2 次収束する： $$|x_{n+1}^r-\alpha^r| \doteqdot \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\alpha h''(\alpha)+(1-r)h'(\alpha)}{\alpha h'(\alpha)}\right)r\alpha^{r-1}\right|(x_n-\alpha)^2 \qquad (2.2.2)$$

(2.1.1)と(2.2.2)の $(x_n-\alpha)^2$ の係数を比較して次の定理を得る．

定理 2.2　$f(\alpha)=0$ とし，αは単根とする．$f(x)$の q 乗の *TH* 法(1.1)が $h(x)$の r 乗の *TH* 法(2.2.1)より収束が速いか等しいための必要十分条件は，q と r が次の条件を満たすことである：

$$-\left|\frac{r\alpha^{r-1}}{q\alpha^{q-1}}\right| \le \frac{\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\dfrac{1-q}{\alpha}}{\dfrac{h''(\alpha)}{h'(\alpha)}+\dfrac{1-r}{\alpha}} \le \left|\frac{r\alpha^{r-1}}{q\alpha^{q-1}}\right| \qquad (2.2.3)$$

定理 2.3　$f(\alpha)=0$ とし，αは単根とする．*TH* 法がニュートン法(*N* 法)より収束が速いか等しいための必要十分条件は根αの近くで次の条件を満たすことである：

$$\left|\left(1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\right)q\alpha^{q-1}\right| \le 1 \qquad (2.3.1)$$

系 2.4　$f(\alpha)=0$ とし，α は単根とする．次の条件が成立つとき $q=2$ の *TH* 法は *N* 法より収束が速いか等しい．

$$\left|\alpha-\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\right| \le \frac{1}{2} \qquad (2.4.1)$$

定理 2.5　$f(\alpha)=0$ とし，αは単根とする．*TH* 法がニュートン法より収束が速いか等しいための必要十分条件は，

曲率 μ_q が不等式

$$|\mu_q| \le \frac{|f''(\alpha)|}{\left|q^3\alpha^{3(q-1)}\left(1+\left(\dfrac{f'(\alpha)}{q\alpha^{q-1}}\right)^2\right)^{3/2}\right|} \qquad (2.5.1)$$

を満たすことである．

定理 2.6　$f(\alpha)=0$ とし，α は単根とする．*TH* 法がニュートン法より収束が速いか等しいための必要十分条件は，曲線の凹凸の判別式が不等式

$$\left|\frac{\alpha f''(\alpha)+(1-q)f'(\alpha)}{q^2\alpha^{2q-1}}\right| \le \left|\frac{\alpha f''(\alpha)}{q^3\alpha^{3q-2}}\right| \qquad (2.6.1)$$

を満たすことである．

注意　定理 2.3，定理 2.5，定理 2.6 の条件を満たす q の範囲は同じくなる．

参 考 文 献

[1] 村瀬義益著・西田知己校注：『算法勿憚改』(1673), 研成社, 1993
[2] 永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980.3