P-11

順序線形位相空間に値をとる非加法的測度について

日本大学理工学部非常勤講師　渡辺 俊一

実数値に値をとる非加法的測度について、Egoroff の定理の成立から Lusin の定理が導かれることが、[2] において Li と Mesiar により示された。線形空間に値をとる非加法的測度に関しても、この事実の成立が予期される。その際、線形空間にどのような条件を課することが必要となるかということに興味が持たれる。

本講演では, 順序線形位相空間に値をとる非加法的測度を考えた際, 測度が Egoroff 条件（Egoroff の定理を満たすこと）と 弱零加法的と pseudometric generating property を持つ場合, 順序線形位相空間に空間に第一可算公理ならびに Hausdorff 空間であることを仮定した場合に測度の正則性、ならびに Lusin の定理の成立が得られることを報告する.

以下, 自然数全体を N, 実数全体を R, N から N への写像全体を Θ とし, Γ を添え字集合とする. 実数係数の線形空間 E に対し次の 1）, 2）の演算が連続である場合, E を順序線形位相空間であるという [1]: 1）$x \le y \Rightarrow x+z \le y+z$; 2）$x \le y, \lambda \ge 0(\lambda は実数) \Rightarrow \lambda x \le \lambda y$. さらに, E の部分集合 F が full であるとは x_1, $x_2 \in F$ で $x_1 \le x_2$ を満たすならば $[x_1, x_2] \subset F$ が成り立つ場合を言う.　$\mathcal{B}_0$ で $0 \in E$ の近傍系を表すとき, E 上の順序線形位相が locally full であるとは, full 集合からなる $\mathcal{B}_0$ の基底が存在する場合を言い, 以下この位相からなる順序線形空間 E を順序線形位相空間と呼ぶこととする. さらに, E は Hausdorff 空間で第一可算公理を満たすとする.

Def 1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は
(i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) A, $B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \le \mu(B)$ を満たすとき, 非加法的測度 *(non-additive measure)* という. 以下 μ は非加法的測度とする.

Def 2. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする.

(1) *2* 重集合列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ は
　(D1) $m, n, n' \in \mathrm{N}$ で $n \le n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m,n'}$
　(D2) $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}) = 0$
　を満たすとき, $\mathcal{F}$ において μ*-regulator* であるという.

(2) μ が *Egoroff* 条件を満たすとは任意の μ*-regulator* $\{A_{m,n}\}$ と任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し $\theta \in \Theta$ が存在し $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}) \in U$ となることである.

Def 3. (1) 集合関数 μ が弱零加法的であるとは $A, B \in \mathcal{F}$ が $\mu(A) = \mu(B) = 0$ であるとき $\mu(A \cup B) = 0$ となることをいう.
(2) 集合関数 μ が *pseudometric generating property* をもつとは任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し, $V \in \mathcal{B}_0$ が存在し任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対し, $\mu(A) \in V$ と $\mu(B) \in V$ ならば, $\mu(A \cup B) \in U$ が成立することである.

Def 4. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度で, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ は X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列, f もそのような関数とする.

(1) 集合 $E \in \mathcal{F}$ で $\mu(E) = 0$ であるものが存在して, 任意の $x \in X - E$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ が成り立つとき, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ は f に μ-概収束するという.

(2) 単調減少な有向集合族 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{r}} \subset \mathcal{F}$ で $\mu(E_\alpha) \downarrow 0$ であるものが存在して, 各 $X - E_\alpha$ 上で f_n が f に一様収束するとき, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ は f に μ-概一様収束するという

(3) X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f に μ-概収束すれば常に μ-概一様収束するとき, *Egoroff* の定理が μ に対して成立するという.

次の定理が成立している [3].

Theorem 1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする. このとき次の条件は同値である:

(i) Egoroff の定理が μ に対して成立する.
(ii) μ は Egoroff 条件を満たす.

X を Hausdorff 空間. $\mathcal{B}(X)$ により X の Borel 部分集合からなる σ 体, すなわちの開集合からなる σ 体. $\mathcal{B}(X)$ 上で定義される非加法的測度を X 上の非加法的 Borel 測度という

Def 5. $\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度．μ が正則であるとは任意の $U \in \mathcal{B}_0$ と $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し，閉集合 F_U と開集合 G_U が存在し $F_U \subset A \subset G_U$ と $\mu(G_U \setminus F_U) \in U$ を満たす．

このとき次の 2 つの定理が成立する。

Theorem 2. X を距離空間とし，$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ を X 上の弱零加法的*, pseudometric generating property* をもち、Egoroff 条件を満たす非加法的 *Borel* 測度とする．このとき μ は正則．

Theorem 3 (Lusin's Theorem)**.** X を距離空間とし，$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ を X 上の弱零加法的*, pseudometric generating property* をもち、Egoroff 条件を満たす非加法的 *Borel* 測度とする．f が *Borel* 可測な X 上の実数値関数であるとしたとき，任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し，閉集合 F_U が存在し $\mu(X \setminus F_U) \in U$ であり，f は F_U 上連続である．

References

[1] R. Cristescu, *Topological vector spaces,* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.
[2] J. Li and R. Mesiar, *Lusin's theorem on monotone measure spaces,* Fuzzy Sets and Systems **175** (2011), 75–86.
[3] T. Watanabe, *On sufficient conditions for the Egoroff theorem of an ordered topological vector space-valued non-additive measure,* Fuzzy sets and Systems **162** (2011), 79–83.

(渡辺 俊一)
E-mail address: wa-toshi@mti.biglobe.ne.jp