P-12

Allen-Cahn 方程式の特異極限問題に対する境界単調性公式
Boundary monotonicity formular for the singular limiting problem of the Allen-Cahn equation

水野 将司[1], 利根川 吉廣[2]
Masashi Mizuno, Yoshihiro Tonegawa

次の Neumann 境界条件における Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\text{(AC)} \qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \Delta u^\varepsilon - \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon}, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

ただし, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域, Δ は空間変数 x における通常の Laplacian, ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル, $\varepsilon > 0$ はパラメータ, $W(u) = (1-u^2)^2$ は典型的な二重井戸型ポテンシャルとする．Allen-Cahn 方程式は Modica-Mortola 問題のエネルギー汎関数

$$E_\varepsilon[u] := \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx$$

の勾配流である．$\varepsilon > 0$ に対して (AC) は一意解を持ち, $\varepsilon \to 0$ とすると, 平均曲率流方程式をみたす界面を生成することが知られている (Ilmanen [6] によって, ヴァリフォールドによる弱解の存在が示されている). これは, $\varepsilon \to 0$ としたときに, ポテンシャルが $W(u^\varepsilon) \to 0$ となることにより, エネルギー汎関数が界面の面積汎関数とみなせることによる．Neumann 境界条件から, 生成される界面は境界に対して直交し, 余次元が 2 の部分多様体となっていると考えられる．そこで界面の境界挙動, とりわけ境界の正則性を考える．正則性を調べるためには, 単調性公式が重要であるため, エネルギー測度に対する境界単調性公式を導出する．

Allard [1] はヴァリフォールドの第一変分と境界の正則性を単調性公式を用いて研究し, Grüter-Jost [5] により, 自由境界問題に拡張されている．また, Bourni [3] によって, 調和関数からの摂動理論を用いた別証も与えられている．Chen-Lin [4] は Dirichlet 境界条件下での調和写像流の境界単調性公式を導出し, 境界正則性を研究した．定常の Allen-Cahn 方程式に対して, Tonegawa [8] が単調性公式を導出し, 密度の評価を与えた．本講演では, 発展 Allen-Cahn 方程式に対して, 境界単調性公式を導出する．

主定理を述べるために, 次を仮定する:

(A1) ある定数 $M > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 初期値 u_0^ε は

$$\|u_0^\varepsilon\|_\infty \le M, \qquad \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}_0 |\nabla u_0^\varepsilon|^2 + \frac{W(u_0^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx \le M$$

をみたす (エネルギーの有界性).

(A2) 領域 Ω は凸とする．すなわち, $\partial\Omega$ の主曲率はすべて負とする．

(A3) 初期値 u_0^ε は次の不等式をみたす (ディスクレパンシーの非正値性):

$$\frac{\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(u_0^\varepsilon)}{\varepsilon} \le 0.$$

初期値に関する仮定 (A1), (A3) については, 平均曲率流を Allen-Cahn 方程式を用いて解析するうえでは本質的な仮定ではない, 領域に関する仮定 (A2) については, あとで述べることにする．修正したエネルギー測度 μ_t^ε とディスクレパンシー測度 ξ_t^ε を

$$d\mu_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{\tilde{W}(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx, \quad d\xi_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u^\varepsilon|^2 - \frac{\tilde{W}(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$$

で定義する．ただし, $\tilde{W}(u^\varepsilon) = W(u^\varepsilon) + \varepsilon M$ とする．このとき, μ_t^ε の $\varepsilon \to 0$ での極限測度 μ_t は内部で平均曲率流の Brakke 解となる (cf. Ilmanen [6]). $x \in \Omega$ を $\partial\Omega$ に十分に近い点とすると, $\zeta(x) \in \partial\Omega$ が一意に存在して $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = |x - \zeta(x)|$ をみたす．この $\zeta(x)$ を用いると, x の $\partial\Omega$ における反射点 $\tilde{x}$ を $\tilde{x} := 2\zeta(x) - x$

[1]講演者の所属: 日大理工・教員・数学 (Department of Mathematics, CST., Nihon-U)
[2]講演者の所属: 北海道大学理学研究院数学部門 (Department of Mathematics, Hokkaido University)

で定めることができる. $\eta \geq 0$ を滑らかなカットオフ関数である $r > 0$ に対して $0 \leq \eta \leq \chi_{[0,r]}$ をみたすとする. $s > 0$ と $y \in \Omega$ に対して, 後ろ向き熱核と反射後ろ向き熱核を $0 < t < s$ と $x \in \Omega$ に対して

$$\rho = \rho_{(s,y)}(t,x) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}\right),$$
$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{(s,y)}(t,x) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{|\tilde{x}-y|^2}{4(s-t)}\right)$$

で定める.

定理 1.

(A1)–(A3) を仮定し, $r > 0$ は十分小とする. n, r, M と $\partial\Omega$ の形状に依存する C_1, $C_2 > 0$ が存在して, 任意の $y \in \partial\Omega$ と $s > 0$ に対して

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\left(\exp\left(C_1(s-t)^{\frac{1}{4}}\right)\int_\Omega (\rho\eta(|x-y|) + \tilde{\rho}\eta(|\tilde{x}-y|))\,d\mu_t + C_2\int_t^s \exp\left(C_1(s-\tau)^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{s-\tau}}\right)d\tau\right) \leq 0$$

が $0 < t < s$ に対して成り立つ.

単調性公式 (1) の意味を考えるために, $t \uparrow s$ としてみると, 後ろ向き熱核は積分量を保存しながら点 y で Dirac のデルタ関数的な爆発を起こす. つまり, t を s に近づけることは, 点 y の近傍を拡大することに対応するが, このときに μ_t の y 近傍の積分量は増えないと主張している. 従って, 点 y の近傍では $\mathrm{spt}\,\mu_t$ はそれほど複雑な形状をしていないということを示唆しており, この評価からさまざまな正則性評価が導出できると考えられる. このことは内部評価では実際に正しく, Kasai-Tonegawa [7] は単調性公式を用いて, 自然な仮定を課すことにより, 平均曲率流の Brakke 解が, ほとんど全ての点で $C^{1,\alpha}$-グラフとして表示できることを示した (cf. Brakke [2]).

反射後ろ向き熱核 $\tilde{\rho}$ を用いると, $\nabla(\rho + \tilde{\rho})$ が境界において接方向に平行となる. 単調性公式は測度 μ_t の第一変分の評価とみなすことができるが, このときの変分ベクトルが $\nabla(\rho + \tilde{\rho})$ となる. つまり, 反射後ろ向き熱核 $\tilde{\rho}$ を用いることによって, 境界での変分を接方向のみに制限している. 微分方程式の Neumann 境界条件との関係については明らかではないが, μ_t から決まる界面の摂動は Ω 内でのみ考えることが自然なため, 微分方程式の境界条件とは別の理由であると考えている.

領域の凸性は本質的な仮定であると予想している. 実際に, 領域が凸でないときには, 正則性が境界で崩れるであろう具体例を考えることができる. 単調性公式が成立するときには, 正則性評価が導出できると考えられることから, 凸でないときは単調性公式が得られないということが推測できる.

境界まで込めて μ_t が Brakke 解となることを示すためには, ディスクレパンシー測度が $\varepsilon \downarrow 0$ としたときに消滅することが重要になる. このことについては, 講演者は密度の下からの評価を仮定することで導出できることがほぼ証明できた. 従って, μ_t が境界まで込めて平均曲率流の Brakke 解であることはほぼ正しいと予想している. さらなる問題として, μ_t は境界で直交条件をみたすか (どのように定式化すべきか), μ_t の境界への制限は余次元 2 の多様体ないしはヴァリフォールドとなるか, どのように特徴付けができるかが考えられる. 特に μ_t の境界への制限を偏微分方程式を用いて特徴付けすることは, 非線形退化放物型方程式と関係があり, 興味深い問題であると考えられる.

References

[1] W. K. Allard, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 418–446.

[2] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Mathematical Notes, vol. 20, Princeton University Press, 1978.

[3] T. Bourni, *Allard type boundary regularity theorem for varifolds with $C^{1,\alpha}$ boundary*, preprint.

[4] Y.-M. Chen and F.-H. Lin, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 327–346.

[5] M. Grüter and J. Jost, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), 129–169.

[6] T. Ilmanen, J. Differential Geom. **38** (1993), 417–461.

[7] K. Kasai and Y. Tonegawa, *A general regularity theory for weak mean curvature flow*, preprint.

[8] Y. Tonegawa, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 69–83.