P-13

三角群の埋め込みについて

Embedding of Triangle Groups

○橋口徳一 [1]
Norikazu HASHIGUCHI

Abstract : For any positive integers p, q, r, let $\Gamma(p, q, r)$ be a triangle group whose presentation is $\langle x, y, z | x^p, y^q, z^r, xyz\rangle$. It is shown that $\Gamma(5, 5, 5)$ is considered as a subgroup of piecewise linear homeomorphisms of the circle by using the Anosov foliations. We ask whether Γ is embedded in the group of germs of analytic diffeomorphisms of the complex plane. We here show several calculation of formal power series for this problem.

1. 定義

ここで取り扱うのは次のような群である。

1. $p, q, r \in \mathbf{N}$ に対して、 $\Gamma(p, q, r) = \langle x, y, z | x^p, y^q, z^r, xyz\rangle$ とおき、**三角群**とよぶ。
2. 円周 S^1 の向きを保つ区分線形な同相写像の全体を $\mathrm{PL}(S^1)$ とおく。 $\mathrm{PL}(S^1)$ は写像の合成を積として群となる。$\mathrm{PL}(S^1)$ の元のグラフは折れ点を持つが、それは有限個である。
3. 原点 O を保つ複素平面 $\mathbf{C}$ 上の解析的な微分同相写像の芽の全体を $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, O)$ とおく。
$$\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, O) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \,\middle|\, a_k \in \mathbf{C}, a_1 \neq 0, O \text{ のある近傍で絶対収束} \right\}$$
である。 $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, O)$ も写像の合成を積として群となる。

2. $\mathrm{PL}(S^1)$ への埋め込み

三角群の $\mathrm{PL}(S^1)$ への埋め込みについては次のことが知られている。

定理１ [5]

$g \in \mathbf{N}$ とする。$\Gamma(2g+2, 2g+2, g+1), \Gamma(2g+1, 2g+1, 2g+1)$ は $\mathrm{PL}(S^1)$ に埋め込める。

これらの埋め込みは Brieskorn 多様体上の Anosov 流に付随する不安定葉層構造を PL 化することで得られる。[1,2,3] において、種数 g の有向閉曲面 Σ_g $(g \geq 2)$ の測地流の不安定葉層構造から Σ_g の基本群の埋め込み $\Phi_g : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{PL}(S^1)$ を構成したのと同じ考察を行う。角度が $\dfrac{2\pi}{p}, \dfrac{2\pi}{q}, \dfrac{2\pi}{r}$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} < 1\right)$ である 3 つの錐特異点を持つ球面 $S(p, q, r)$ の測地流は、Poincaré 円盤の測地流を三角群 $\Gamma(p, q, r)$ で割って得られる。定理の場合（つまり $p = q = 2g+2, r = g+1$ または $p = q = r = 2g+1$ の場合）には、その測地流に対して良い Birkhoff section を構成できて、測地流が 2 次元トーラス Σ_1 上の Anosov 同相の懸垂流に手術を施して得られることがわかる。そこで、この測地流の不安定葉層構造の全ホロノミーを計算すると、求める単射準同型 $\varphi_{p,q,r} : \Gamma(p, q, r) \to \mathrm{PL}(S^1)$ が得られる。

1：日大理工・教員・数学、平成２３年度日本大学理工学部基礎科学研究助成金受領者

[4] において、ある分岐被覆 $p_g : \Sigma_g \to S(2g+2, 2g+2, g+1)$ によって Φ_g と $\varphi_{2g+2,2g+2,g+1}$ との間に次の関係があることが示されている。

定理２

$$\Phi_g = \varphi_{2g+2,2g+2,g+1} \circ p_{g*}$$

$\varphi_{2g+1,2g+1,2g+1}$ についても、[1] で構成された Σ_g の測地流に対する別の Birkhoff section から得られる単射準同型 Ψ_g と分岐被覆 $q_g : \Sigma_g \to S(2g+1, 2g+1, 2g+1)$ を用いて同様のことが成り立つ。

定理３

$$\Psi_g = \varphi_{2g+1,2g+1,2g+1} \circ q_{g*}$$

3. $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, O)$ への埋め込み

$\mathrm{PL}(S^1)$ と同様のことが複素解析的な場合にも成り立つかどうかを調べたい。その準備として、$\Gamma(5,5,5)$ について次のような計算を行った。まず、

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, O)$$

が位数 5 の元であるためには、a_1 は 1 以外の 1 の 5 乗根でなくてはならない。
さらに次が成り立つ。

補題

$f(z) = e^{\frac{2m\pi}{5}i}z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + \cdots \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, O)$ $(m = \pm 1, \pm 2)$ とするとき、

$$f^5(z) = z + (6\ \text{次以上の項})$$

参考文献

1. M. Brunella, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **3**(1994), 335–344.

2. E. Ghys, *Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey*, Ann. Inst. Fourier **37-4**(1987), 59–76.

3. N. Hashiguchi, *On the Anosov diffeomorphisms corresponding to geodesic flows on negatively curved closed surfaces*, Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo **37**(1990), 485–494.

4. N. Hashiguchi, *PL-REPRESENTATIONS OF ANOSOV FOLIATIONS*, Ann. Inst. Fourier **42-4**(1992), 937–965.

5. N. Hashiguchi, *On the geodesic flows on Seifert fibered spaces*, preprint.