P-4

絡み目理論の符号数と退化次数
Signature and nullity on link theory

○岡田幸平[1]　橋口徳一[2]
*Kohei Okada　Norikazu Hashiguchi

Abstract

Seifert matrix is defined from Seifert surface of a link . The signature and the nullity of Seifert matrix of a link are invariants of link types. We show a formula for the signature and the nullity when a link is deformed by a connecting band.

定義 1.
3 次元球面 S^3 内の m 個の互いに交わらない，区分線型な単純閉曲線 L を，m 成分の絡み目（*link*）といい，特に 1 成分の絡み目 K を結び目（*knot*）という．$\mu(L)$ で絡み目 L の成分数を表すとする．

定理 2.
S^3 内の任意の向き付けられた絡み目 L は，L を境界とする向き付け可能な曲面 D を持つ．この D を S-曲面という．

定義 3.
S^3 内の絡み目 L_1 と L_2 において，$h(L_1)=L_2$ を満たすような，向きを保つ区分線型な同相写像 $h:S^3\to S^3$ が存在するとき，L_1 と L_2 は同値であるという．

定義 4.
$\mu:=\mu(L)$ とし，S-曲面 D の種数を g とすると，1 次元ホモロジー群 $H_1(D)$ は階数 $h:=2g+\mu-1$ の自由アーベル群になる．ここで $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_h$ を D 内の単純閉曲線とし，$H_1(D)$ の基を表しているとする．$i\neq j$ とすると，α_i と α_j は高々 1 点で交わるようにとることができる．$\tau:D\to S^3-D$ を D の正法線方向へのわずかな変位とする．

このとき h 次整数正方行列 $M:=(lk(\tau(\alpha_i),\alpha_j))$ を，L の S-行列という．また $\widehat{M}:=M+{}^tM$ を L の対称化行列という．ここで $lk(a,b)$ は単純閉曲線 a，b の絡み数（*linking number*）とする．

定義 5.
h 次対称整数行列 $\widehat{M}$ と $\widehat{M'}$ が次の 2 種類の変換とその逆を有限回行うことで移りあうとき，$\widehat{M}$ は $\widehat{M'}$ と S-同値であるといい $\widehat{M}\overset{S}{\sim}\widehat{M'}$ で表す：

$$\Lambda_1:\widehat{M}\to T\,\widehat{M}\,{}^tT$$
$$(T \text{ は } h \text{ 次整数正方行列で } detT=\pm1)\,;$$

$$\Lambda_2:\widehat{M}\to\left(\begin{array}{c|cc}\widehat{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & 0 & 1\\ \mathbf{0} & 1 & 0\end{array}\right).$$

定理 6.
$\widehat{M}$ の S-同値類は，絡み目不変量である．

命題 7.
$\widehat{M}$ は適当な h 次有理数正則行列 R を用いて対角行列

$$R\,\widehat{M}\,{}^tR=\begin{pmatrix}a_1 & & & & & & \\ & a_2 & & & O & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_m & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & O & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}\qquad(1)$$

（但し a_i は 0 でない実数）

に変換される．このとき

$$\sigma(\widehat{M}):=(\text{正の } a_i \text{の個数})-(\text{負の } a_i \text{の個数})\qquad(2)$$
$$n(\widehat{M}):=(\text{対角成分の } 0 \text{ の個数})\qquad(3)$$

は絡み目不変量である．

定義 8.
$\sigma(\widehat{M})$ を絡み目 L の符号数といい，$\sigma(L)$ で表す．また $n(\widehat{M})$ を絡み目 L の退化次数といい，$n(L)$ で表す．

定理 9.
絡み目 L 上に任意の弧 $\widehat{AB}$，$\widehat{CD}$（$\widehat{AB}\cap\widehat{CD}\neq\varnothing$）を取り，ここに帯を付ける（帯と L とは $\widehat{AB}$，$\widehat{CD}$ 以外では交わらないものとする．また弧の取り方は同成分でもよい）．$\widehat{AB}$，$\widehat{CD}$，帯の内部を取り除いてできた新たな絡み目を L' とする．L' の向きが矛盾がなく定まるように，帯を付けることに注意する．このとき次が成り立つ：

(i) $|n(L')-n(L)|\leqq 1$

(ii) $|n(L')-n(L)|+|\sigma(L')-\sigma(L)|=1$.

証明.
証明の方針は，まず (i) を示し，次に (ii) については $|n(L')-n(L)|=0,1$ と場合分けをして考える．

[1]日大理工・院 (前)・数学
[2]日大理工・教員・数学

L と L' の対称化行列 $\widehat{M}, \widehat{M'}$ が

$$\widehat{M'} = \begin{pmatrix} 2a & N \\ {}^tN & \widehat{M} \end{pmatrix} \tag{4}$$

となるように S-曲面を取ることができる（N は横行列）.

$\widehat{M}$ が正則の場合を考える．このとき $\widehat{M'}$ と $\widehat{M}$ の階数の差は高々 1 である．$\widehat{M}$ が正則より $n(L) = 0$ なので，$n(L') = 0, 1$ である．よって $n(L') - n(L) = 0, 1$ となり (i) を満たす.

$n(L') - n(L) = 1$ のとき，つまり $\widehat{M'}$ が特異行列のとき，いくつかの基本行列の積 R を用いて $\widehat{M'}$ を次のように変形できる：

$$R\,\widehat{M'}\,{}^tR = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{M} \\ 0 & \end{array}\right). \tag{5}$$

よって R が正則であることから，$\widehat{M'}$ と $\widehat{M}$ の符号数が一致する.

$n(L') - n(L) = 0$ のとき，つまり $\widehat{M'}$ が正則行列のとき，いくつかの基本行列の積 R を用いて $\widehat{M'}$ を次のように変形できる：

$$R\,\widehat{M'}\,{}^tR = \left(\begin{array}{c|c} b & 0\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{M} \\ 0 & \end{array}\right),\ b \neq 0. \tag{6}$$

よって R が正則であることから，$\sigma(\widehat{M'}) = \sigma(b) + \sigma(\widehat{M})$ である．$\sigma(b) = \pm 1$ より $|\sigma(\widehat{M'}) - \sigma(\widehat{M})| = 1$ となり,(ii) を満たす.

$\widehat{M}$ が特異行列の場合を考える．いくつかの基本行列の積 R を用いて次のように $\widehat{M}$ を対角化する：

$$R\,\widehat{M}\,{}^tR = \left(\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline O & O \end{array}\right),\ |P| \neq 0. \tag{7}$$

ここで $R' := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & R \end{pmatrix}$ を用いて $\widehat{M'}$ を次のように変形する：

$$R'\,\widehat{M'}\,{}^tR' = \begin{pmatrix} 2a & N\,{}^tR \\ R\,{}^tN & R\,\widehat{M}^t\,R \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 2a & P_1 & P_2 \\ \hline {}^tP_1 & P & O \\ \hline {}^tP_2 & O & O \end{array}\right) \tag{9}$$

$(N\,{}^tR := (P_1 \mid P_2)$ とする$)$.

P_2 が零行列のとき P は正則なので，いくつかの基本行列の積 T によって次のように変形できる：

$$T\,(R'\,\widehat{M'}\,{}^tR')\,{}^tT = \left(\begin{array}{c|c|c} a' & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \hline 0 & & \\ \vdots & P & O \\ 0 & & \\ \hline 0 & & \\ \vdots & O & O \\ 0 & & \end{array}\right). \tag{10}$$

$T\,R'$ が正則であることから，$n(\widehat{M'}) = n(a') + n(\widehat{M})$ である．よって $n(\widehat{M'}) - n(\widehat{M}) = n(a') = 0, 1$ となり，(i) を満たす.

$n(\widehat{M'}) - n(\widehat{M}) = n(a') = 0$ のとき，$a' \neq 0$ である．このとき (10) のように変形されることから $\sigma(\widehat{M'}) = \sigma(a') + \sigma(P) = \sigma(a') + \sigma(\widehat{M})$. よって $|\sigma(\widehat{M'}) - \sigma(\widehat{M})| = |\sigma(a')| = 1$ となり，(ii) を満たす.

$n(\widehat{M'}) - n(\widehat{M}) = n(a') = 1$ のとき，$a' = 0$ である．このとき $\sigma(\widehat{M'}) = \sigma(P) = \sigma(\widehat{M})$ となり，(ii) を満たす.

P_2 が零行列でないとき，いくつかの基本行列の積 T によって次のように変形できる：

$$T\,(R'\,\widehat{M'}\,{}^tR')\,{}^tT = \left(\begin{array}{c|c|cccc} p_2 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & P & & O & & \\ 0 & & & & & \\ \hline 0 & & -p_2 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & O & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array}\right) \tag{11}$$

$(\,p_2 \neq 0)$.

よって明らかに $n(\widehat{M'}) = n(\widehat{M}) - 1$ であるので (i) を満たす．また (11) の行列から $\sigma(\widehat{M'}) = \sigma(\widehat{M})$ となり，(ii) を満たす. □

参考文献

[1] W.B.Raymond Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics **175**,Springer (1997) .

[2] 村杉邦男, 結び目の理論, 数学 **23** (1971), 193-204.

[3] 寺阪英孝, 結び目の理論, 数学 **12** (1960), 1-20.