P–5

Zeta-関数の関数等式とその応用

Poisson 和公式の別証明

Functional equation of the zeta-function and its application

Another proof of Poisson summation formula

岩田 英人[*1]

Iwata Hideto[*1]

Abstract

In this report,we define the Riemann-zeta function, and show its functional equation. Next,we state three lemmata to prove Poisson summation formula. Finally, we try to prove Poisson summation formula as an application of the functional equation.

1.Riemann-zeta 関数

Definition 1.1

複素変数 $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.1}$$

を *Riemann-zeta* 函数という.

2.zeta 関数の関数等式

Theorem2.1

任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して, 関数等式

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{s}{2}\pi\right)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{2.1}$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta(s) \tag{2.2}$$

が成立する.

Proof:$Re(s) > 0$ における Γ-関数の積分表示式

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx \tag{2.3}$$

を用いる.(2.3) において, 変数 x を nx $(n \in \mathbb{N})$ と変換し,$\sigma > 1$ の下で和をとると,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}dx. \tag{2.4}$$

これを変形し,

$$-2i\sin(s\pi)\Gamma(s)\zeta(s) = \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{2.5}$$

が得られる. 但し, 積分路 C は実軸上にて $+\infty$ から点 ϵ $(\forall\epsilon > 0)$ に進み, 原点を中心に正方向に円を描き, 再び実軸に沿い $+\infty$ に戻る曲線とする. この間,$-\pi < \arg(-z) < \pi$ とする.

(2.5) の右辺積分は s の整関数を表示するので,$\sigma < 0$ とすることが出来る. 積分路 C の円周部分を $|z| = (2N+1)\pi$ $(N \in \mathbb{N})$ と拡大し,(2.5) において極 $z = \pm 2n\pi i$ $(1 \le n \le N)$ における留数を計算する. $N \to \infty$ のとき,

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz = -4\pi i\sin\left(\frac{s}{2}\pi\right)\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{s-1} \tag{2.6}$$

が得られる.$Re(1-s) > 0$ より,(2.1) が示される. なお,(2.1) から (2.2) を示す際は倍角公式などの Γ-関数の基本的性質を用いる.■

3.Poisson 和公式

Theorem3.1

正の実軸上において有界な台を持つ C^{∞}-級関数 f を採る. このとき,Poisson 和公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f(x)e^{2n\pi ix}dx \tag{3.1}$$

が成立する.

証明には次の 3 つの *Lemma* を順に用いる.

Lemma3.2

[*1] 日大理工・院 (前)・数学

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のとき,

$$[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi} \tag{3.2}$$

が成立する. 更に, 右辺の級数に対して有界収束性

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi} \ll \frac{1}{1+N\{x\}} \tag{3.3}$$

が成立する. 但し,$N \in \mathbb{N}$ であり,$\{x\}$ は x の小数部分を意味する. 更に, 記号 $\ll$ は $Landou$ の記号 O と同義である.

Lemma3.3

f を有限区間 $[a,b]$ において C^1-級関数とする. このとき,Euler-Maclaurin 和公式

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(x)d[x] \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f'(x)\xi(x)dx \\ &\quad + f(b)\xi(b) - f(a)\xi(a)\end{aligned} \tag{3.4}$$

が成立する. 但し, 関数 $\xi(x)$ は (3.2) の左辺である.

Lemma3.4

f を $Lemma$3.3 と同じ条件を満たす関数とする. このとき, 有限和に関する Poisson 和公式

$$\sum_{a\leq n\leq b} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_a^b f(x)e^{2n\pi ix}dx \tag{3.5}$$

が成立する. 但し,$a \in \mathbb{Z}$ のとき, 左辺において $\frac{f(a)}{2}$ を加える.$b \in \mathbb{Z}$ ついても同様とする.

4. 関数等式の応用

この節では $zeta$-関数の関数等式の応用として,Poisson 和公式の別証明を試みる.

Definition 4.1

$f(x)$ を区間 $(0,+\infty)$ にて $x^{k-1}|f(x)|$ $(Re(s)=k>0)$ が可積であるような連続関数とする. このとき,

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx \tag{4.1}$$

を,f の Mellin 変換と言う. また,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{k-iT}^{k+iT} f^*(s)x^{-s}ds \tag{4.2}$$

を,f の Mellin 逆変換と言う.

更に,Γ-関数についての Stirling 公式を用いる.

Lemma4.2

複素変数 $s=\sigma+it$,$\sigma, t \in \mathbb{R}$ に対して,$|s| \to \infty$ のとき

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\left(1+O(|t|^{-2})\right) \tag{4.3}$$

が成立する.

Proof of (3.1):(4.2) を (3.1) の左辺に代入し, 項別積分の正当性を考慮すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} f^*(s)n^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} f^*(s)\zeta(s)ds \tag{4.4}$$

となる. 但し, 積分路は垂直線 $Re(s)=2$ である.

$\zeta(s)$ は $s=1$ において 1 位の極を持ち, 留数は 1 である. よって,$s=1$ を含む積分路を考え, 留数定理を用いることで積分路を $\left(-\frac{1}{2}\right)$ に移動する.

その後に関数等式, 及び Γ-関数の基本的性質を用いる.(4.3) により項別積分は正当化されるので,(4.4) の右辺は

$$f^*(1) + \frac{1}{2\pi^2 i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{(-\frac{1}{2})} f^*(s)\sin\left(\frac{s}{2}\pi\right)\Gamma(1-s)(2n\pi)^s ds \tag{4.5}$$

となる.

被積分函数は $s=2m+1$ $(m=0,1,2,\cdots)$ において 1 位の極を持つので, 特に $s=1$ のみを含む積分路を考える. 再び留数定理, 及び (4.3) を用いて積分路を $\left(\frac{7}{4}\right)$ に移動する.

$\Gamma(1-s)$ の極 $s=2m+1$ $(m \in \mathbb{N})$ における留数は $-\frac{1}{(2m)!}$ であるから, この点において

$$-\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)\frac{(2n\pi x)^{2m+1}}{(2m)!} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}(2n\pi x)^{2m+1} \tag{4.6}$$

となる.(4.6) の右辺の無限和は,$-2n\pi x\{\cos(2n\pi x)-1\}$ となる. 留数定理を用いて整理をすることで,(3.1) の右辺が導かれる.■

5. 参考文献

[1] 本橋洋一:解析的整数論 I-II , 朝倉書店, 第 1-2 巻,2009-2011