P−7

尖点形式の L-函数　(L-functions of cusp forms)

上石冬華[*1], ○吉崎哲也[*1], 佐々木隆二[*2]
Fuyuka Kamiishi[*1], Tetsuya Yosizaki[*1], Ryuji Sasaki[*2]

1　SL$(2,\mathbb{Z})$ に対する保型形式

上半平面 $\mathcal{H}$ 上の正則関数 $f(z)$ は

$$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z),$$

$$\forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$$

を満たすとする. $f(z+1) = f(z)$ が成り立つので,

$$z \longmapsto q = e^{2\pi i z}$$

と変数変換し, $f(z) = g(q)$ とする. $g(q)$ は原点の回りで正則関数となるので, Laurent 級数に展開される：

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n.$$

$a_n = 0$ $(n<0)$ を満たすとき, $f(z)$ を重さ k の **モジュラー形式** という. 更に, $a_0 = 0$ をみたすならば, $f(z)$ は **尖点形式** と呼ばれる. 重さ k のモジュラー形式, 尖点形式のなす複素線形空間を M_k, S_k で表す.

k を 4 以上の偶数とするとき, Eisenstein 級数

$$G_k(z) := \sum_{m,n;(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

は, 重さ k のモジュラー形式である. その q 展開については, 次節を参照のこと. さて,

$$g_2(z) = 60G_4(z),\ g_3(z) = 140G_6(z)$$

とし,

$$\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2$$

とすると, Δ は重さ 12 の尖点形式となる.

2　Ramanujan

Dedekind η 函数

$$\eta(z) := e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

は,

$$\eta(z+1) = e^{\pi i/12}\eta(z),\ \eta(-1/z) = (-iz)^{1/2}\eta(z)$$

を満たす. 但し, 平方根は $z=i$ のとき, 1 をとる分枝である. 従って, $\eta(z)^{12}$ も重さ 12 の尖点形式となり, 重さ 12 の尖点形式の空間が 1 次元であることから,

$$\Delta_0(z) := (2\pi)^{-12}\Delta(z) = \eta(z)^{24}$$

を得る. 右辺を利用して, Δ_0 の Fourier 展開

$$\Delta_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

係数を少し書き上げよう：

$$\tau(1)=1,\ \tau(2)=-24,\ \tau(3)=252,\ \tau(4)=-1472,$$

$$\tau(5)=4830,\ \tau(6)=-6048,\ \tau(7)=-16744,\ \cdots.$$

これら係数に対し, Ramanujan は, 次の (1),(2) を予想し (3) を示した：

(1) $L(s,\Delta_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s}$ とおくと,

$$L(s,\Delta_0) = \prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}}.$$

(2) $|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}$　(p : 素数)
(3) $\tau(p) \equiv p^{11} \pmod{691}$.

(1) は Mordell により, 1917 年に, 証明された. Mordell の証明法が, Hecke により一般化された. 以下でこの解説をする. (2) は, Deligne により, 1974 年に証明された. (3) は次のようにして示される.

$$E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(k)}G_k = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

と q 展開される. ここで, $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$, $\zeta(k)$ は Riemann ゼータ函数の k に於ける値, 更に, Bernoulli 数 B_k は, 級数

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}$$

に依り定義される. 例えば,

$$E_6(z) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n,$$

$$E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)q^n$$

であり, $E_{12}(z) - E_6(z)^2$ は, 重さ 12 の尖点形式である. 従って, 係数を比較して,

$$E_{12}(z) - E_6(z)^2 = \frac{1008.756}{691}\Delta_0(z).$$

*1 日大理工・院（前）・数学
*2 日大理工・数学

両辺の q^n の係数を比較して

$$\tau(n) = \sigma_{11}(n) + \frac{691}{756}(\sigma_{11}(n) + \sigma_5(n) - 252\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_5(m)\sigma_5(n-m)).$$

従って, $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$, 特に, (3) を得る.

3　尖点形式の L 関数

$f \in S_k$ を尖点形式とし, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ をその q 展開とする. f の L 関数を Dirichlet 級数

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

により定める. すると, 次が成り立つ：

定理 3.1 (Hecke)$L(s,f)$ は Re $s > \frac{k}{2} + 1$ において正則関数をなす. 更に, $L(s,f)$ は, 全複素平面に正則に解析接続され,

$$\Lambda(s,f) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$$

は, 次の関数等式を満たす：

$$\Lambda(s,f) = (-1)^{k/2}\Lambda(k-s,f).$$

4　Hecke 作用素

$M(n) = \{\alpha \in Mat_2(\mathbb{Z}) \mid \det\ \alpha = n\}$ とすると, $SL_2(\mathbb{Z})$ は左から作用する. この軌道と, $\mathbb{Z}^2$ の指数 n の部分群が対応するので, 軌道の個数 $\nu(n)$ は有限個である：

$$M(n) = \sum_{i=1}^{\nu(n)} SL_2(\mathbb{Z})\alpha_i.$$

代表元 $\{\alpha_i\}$ は以下の通り：

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid ad = n, d > 0, 0 \le b < d \right\}.$$

$f \in M_k$ に対し, Hecke 作用素 $T_k(n)$ は

$$T_k(n)f = n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{i=1}^{\nu(n)} f \circ [\alpha_i]_k$$

と定義される. 但し, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対し,

$$(f \circ [\alpha]_k)(\tau) = f(\alpha\tau)(c\tau + d)^{-k}(\det\ \alpha)^{k/2}.$$

すると, $T_k(n)$ は, 次を満たす：

$$T_k(n)(M_k) \subset M_k, \quad T_k(n)(S_k) \subset S_k.$$

定理 4.1 （Hecke）M_k 上の作用素として, Hecke 作用素は次を満たす：

(1) p を素数とするとき,

$$T_k(p^r)T_k(p) = T_k(p^{r+1}) + p^{k-1}T_k(p^{r-1}) \quad (r \ge 1).$$

特に, $T_k(p^r)$ は $T_k(p)$ の整係数多項式として表される.

(2) $(m,n) = 1$ ならば $T(m)T(n) = T(mn)$.

(3) $T_k(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ が生成する代数は, $T_k(p)$ (p : 素数) により生成される可換代数である.

5　Hecke 作用素と Petersson 内積

$f, h \in S_k$ に対し, それらの Petersson 内積を

$$\langle f, h\rangle := \int_R f(z)\overline{h(z)}\sigma^k \frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2} \quad (z = \sigma + i\rho)$$

と定める. 但し, R は, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対する通常の基本領域である. すると, S_k は非退化エルミート空間となり, Hecke 作用素 $T(n)$ は自己共役作用素となる.

$f \in S_k$ が $\{T_k(n)\}$ の同時固有関数で $T_k(n)f = \lambda(n)f$ を満たすとする. $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ が f の q 展開ならば, $c_n = \lambda(n)c_1 \quad (\forall n)$ が成り立つ. $c_1 = 1$ ならば, 定理 4.1 より, 次を得る：

(1) $\quad c_{p^r}c_p = c_{p^{r+1}} + p^{k-1}c_{p^{r-1}}$

(2) $\quad c_m c_n = c_{mn} \quad \mathrm{GCD}(m,n) = 1.$

条件 (2) により, $L(s,f)$ は Euler 積表示を持つ. また, (1) により, その Euler 積表示の p 番目の因子は

$$\frac{1}{1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

となる. 即ち, 次を得る：

定理 5.1 (Hecke-Petersson) S_k は, Hecke 作用素 $T_k(n)$ に関して, 同時固有ベクトルからなる直交基底を持つ. 各固有ベクトル f は, q 展開 $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ が $c_1 = 1$ を満たすよう正規化される. 正規化された同時固有ベクトル f の q 展開の係数は (1), (2) を満たす. 更に, f の L 関数 $L(s,f)$ は, Re $s > \frac{k}{2} + 1$ で収束する Euler 積表示

$$L(s,f) = \prod_p \frac{1}{1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

を持つ.

参考文献

(1) A.W.Knapp; *Elliptic curves*, Princeton Univ. Press,1992.

(2) 黒川重信, 栗原将人, 斎藤毅; 数論 3 岩澤理論と保型形式, 現代数学の基礎 16, 岩波書店, 1998.