P-8

Modular 形式 $\left(\frac{\eta^p(\tau)}{\eta(p\tau)}\right)^2$
Eisenstein 級数を用いた Hecke の証明
Modular Form $\left(\frac{\eta^p(\tau)}{\eta(p\tau)}\right)^2$
Proof using Eisenstein series by Hecke

○寺島三晴[1], 佐々木隆二[2]
Mitsuharu Terashima[1], Ryuji Sasaki[2]

Following Hecke[2], we prove that, using the Eisenstein series, $(\eta^p(\tau)/\eta(p\tau))^2$ is a modular form of weight $p-1$ and level p.

1 Introduction

Hecke は最晩年の論文と思われる [2] において, 素数 $p \geq 3$ と Dedekind η を用いて得られる関数 $(\eta^p(\tau)/\eta(p\tau))^2$ が weight $p-1$, level p の modular 形式である事を証明している. 本稿では, その証明を紹介する.

2 Modular 形式と Dedekind η

$\mathcal{H}$ を上半平面, $\Gamma_0(N)$ を level N の Hecke 部分群とする. $\alpha \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ は $\mathcal{H}$ 上の一次分数変換を引き起す. その写像 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{H}$ により $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ は $\mathcal{H}$ に連続的に作用し, $\Gamma_0(N)$ は $\mathcal{H}$ に不連続に作用する. また, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \{\infty\} \cup \mathbb{Q}$ に自然に可移に作用する. この時, $x \in \{\infty\} \cup \mathbb{Q}$ に対し $\Gamma_0(N)x$ を $\Gamma_0(N)$ の cusp と呼び, $\beta(\infty) = x$ ($\beta \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$) を cusp $\Gamma_0(N)x$ の代表元と呼ぶ. $\Gamma_0(N)$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の有限指数な部分群である事から, $\Gamma_0(N)$ の cusp は有限個である.

$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \tau \in \mathcal{H}$ に対し, $\delta(\gamma,\tau) := c\tau + d$ とする. また, $\mathcal{H}$ 上の関数 f と $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $f \circ [\gamma]_k(\tau) := \delta(\gamma,\tau)^{-k} f(\gamma\tau)$ と定める. $\mathcal{H}$ 上正則な関数 f が任意の $\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対し $f \circ [\gamma]_k = f$ を充すとする. この時, $q_N := e^{2\pi i\tau/N}$ を用いて, 各 $\beta \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対し $f \circ [\beta]_k(\tau)$ は $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(\beta)} q_N^n$ と q_N の冪級数で書ける. これを q_N 展開と呼ぶ. この時, 各 cusp の代表元 $\beta(\infty)$ に対し $f \circ [\beta]_k$ の q_N 展開が $q_N = 0$ で正則ならば, f を weight k, level N の modular 形式と呼び, 更に $q_N = 0$ を零点にもつならば cusp 形式と呼ぶ. これは代表元のとり方によらず well-defined である.

次に, 関数 Dedekind η を次の様に定義する.

$$\eta(\tau) := e^{\frac{2\pi i\tau}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

この時 $\Delta := (2\pi)^{12}\eta^{24}$ とすると, Δ は weight 12, level 1 の cusp 形式となる事が知られている (cf.[1]).

[1]日大理工・院（前）・数学
[2]日大理工・教員・数学

3 Eisenstein 級数

$k \geq 1$ を整数とする. $\tau \in \mathcal{H}$ と素数 $p \geq 3$, 整数の組 $(a_1, a_2) \not\equiv (0,0) \mod p$ に対し,

$$G_k(\tau; a_1, a_2; p) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M} \frac{1}{((np+a_1)\tau + (mp+a_2))^k}$$

と定義する. G_k を weight k の Eisenstein 級数と呼ぶ. 今回用いるのは weight 2 の Eisenstein 級数であり, これは次の様に書ける.

$$G_2(\tau; a_1, a_2; p) = b_{0;a_1,a_2;p} - \frac{4\pi^2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n;a_1,a_2;p}\, q_p^n, \quad (1)$$

$$b_{0;a_1,a_2;p} := \begin{cases} 0 & \text{if } a_1 \not\equiv 0, \\ \sum\limits_{m\equiv a_2\,(p)} \frac{1}{m^2} & \text{if } a_1 \equiv 0, \end{cases}$$

$$b_{n;a_1,a_2;p} := \sum_{\substack{0<d|n \\ n/d\equiv a_1\,(p)}} d\xi^{a_2 d} + \sum_{\substack{0<d|n \\ n/d\equiv -a_1\,(p)}} d\xi^{-a_2 d}, \quad \xi := e^{2\pi i/p}.$$

また, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対し次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &G_2(\gamma\tau; a_1, a_2; p) \\ &\quad = \delta(\gamma,\tau)^2 G_2(\tau; aa_1 + ca_2, ba_1 + da_2; p) - \frac{2\pi i c\delta(\gamma,\tau)}{p}. \quad (2) \end{aligned}$$

4 Weight $p-1$ の modular 形式 $P(\tau)$

$\tau \in \mathcal{H}$ と素数 $p \geq 3$ に対し, 次を定義する.

$$P(\tau) := \prod_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(G_2(\tau; 0, 2l; p) - G_2(\tau; 0, l; p) \right).$$

P は (2) により, 任意の $\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対し $P \circ [\gamma]_{p-1} = P$ が成り立つ事が示される. $\Gamma_0(p)$ の cusp の代表元は, $\infty, 0 = S(\infty)$ ($S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) の二つで尽される. 故に, P が modular 形式となるには, P と

$$P \circ [S]_{p-1}(\tau) = \prod_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(G_2(\tau; -2l, 0; p) - G_2(\tau; -l, 0; p) \right)$$

の二つが $q_p = 0$ で正則であれば良い. (1) より, これらの因数は全て $q_p = 0$ で正則である. 故に P は modular 形式である.

後々の為に $P, P \circ [S]_{p-1}$ の点 $q_p = 0$ における値を調べる. $G_2(\tau; 0, 2l; p) - G_2(\tau; 0, l; p)$ の q 展開の定数項は $b_{0;0,2l;p} - b_{0;0,l;p} \neq 0$ であるから, P は $q_p = 0$ で 0 でない. 次に $P \circ [S]_{p-1}$ を調べる.

$$G_2(\tau; -2l, 0; p) - G_2(\tau; -l, 0; p) = -\frac{4\pi^2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n;-2l,0;p} - b_{n;-l,0;p}) q_p^n \quad (3)$$

より, P は $q_p = 0$ で零点をとる. この位数を求める. $1 \leq l \leq p-1$ に対し $b_{n;l,0;p} \neq 0$ となる最小の $n \geq 1$ は,

$$b_{n;l,0;p} = \sum_{\substack{0<d|n \\ n/d \equiv l\ (p)}} d + \sum_{\substack{0<d|n \\ n/d \equiv -l\ (p)}} d$$

より $\min\{l, p-l\}$ となる. 故に (3) の位数は, $1 \leq l \leq \frac{p-1}{2}$ の時 $\min\{l, p-2l\}$ である. 従って, $P \circ [S]_{p-1}$ の位数は $\sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \min\{l, p-2l\}$ となる. これは, $p \equiv \pm 1 \mod 6$ で場合分けをする事で $\frac{p^2-1}{12}$ に等しい事が分かる.

5 $\left(\frac{\eta^p(\tau)}{\eta(p\tau)}\right)^2$ が modular 形式である事の証明

本題の $H(\tau) := (\eta^p(\tau)/\eta(p\tau))^2$ が modular 形式である事の証明を行う. その為に, 次の Lemma を用いる.

Lem. *weight* 0 の *modular* 形式は定数関数である.

この Lemma の効果は, P^{12}/H^{12} について検証する事で表われる. これは $(2\pi)^{12(p-1)} H^{12}(\tau) = \Delta^p(\tau)/\Delta(p\tau)$ である事に由来する. Δ が weight 12 の modular 形式である事から, Δ^p は weight $12p$ の modular 形式となる. また, $\Delta(p\tau)$ は weight 12, level p の modular 形式となり, 故に任意の $\gamma \in \Gamma_0(p)$ に対し,

$$H^{12} \circ [\gamma]_{12(p-1)}(\tau) = \frac{\delta(\gamma,\tau)^{-12p} \Delta^p(\gamma\tau)}{\delta(\gamma,\tau)^{-12} \Delta(p\gamma\tau)} = \frac{\Delta^p(\tau)}{\Delta(p\tau)} = H(\tau)$$

が成り立つ. $H^{12}, H^{12} \circ [S]_{12(p-1)}$ の q_p 展開を調べる. Δ は $\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_1^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_p^{np}$, $c_1 \neq 0$ と q_p 展開される事が知られている事から,

$$\Delta^p(\tau) = q_p^{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n q_p^{np} \quad (c'_0 \neq 0),$$

$$\Delta(p\tau) = q_p^{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} q_p^{np^2}.$$

故に $\Delta^p, \Delta(p\tau)$ は $q_p = 0$ で同位の零点をもつから, H^{12} は $q_p = 0$ で正則, 且つ 0 でない. 一方,

$$\Delta^p \circ [S]_{12p}(\tau) = \Delta^p(\tau) = q_p^{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n q_p^{np},$$

$$\Delta \circ [S]_p (p\tau) = \Delta\left(\frac{\tau}{p}\right) = q_p \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} q_p^n$$

より, $\Delta^p \circ [S]_{12p}, \Delta \circ [S]_p (p\tau)$ は $q_p = 0$ で $p^2, 1$ 位の零点をもつから, $H^{12} \circ [S]_{12(p-1)}$ は $q_p = 0$ で $p^2 - 1$ 位の零点をもつ. 以上により H^{12} は modular 形式である.

さて, P は weight $p-1$ であったから, P^{12} は weight $12(p-1)$ となる. 故に, 任意の $\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対し,

$$\frac{P^{12}}{H^{12}} \circ [\gamma]_0 (\tau) = \frac{\delta(\gamma,\tau)^{12(p-1)} P^{12}(\gamma\tau)}{\delta(\gamma,\tau)^{12(p-1)} H^{12}(\gamma\tau)} = \frac{P^{12}}{H^{12}}(\tau)$$

が成り立つ. modular 形式である事を示す. P^{12}, H^{12} は共に $q_p = 0$ で 0 をとらない. 故に P^{12}/H^{12} は $q_p = 0$ で正則である. また, $P \circ [S]_{p-1}$ の零点 $q_p = 0$ の位数は $\frac{p^2-1}{12}$ であるから, $P^{12} \circ [S]_{12(p-1)}$ の位数は $p^2 - 1$ であり, これは $H^{12} \circ [S]_{12(p-1)}$ の位数に等しい. 故に $(P^{12}/H^{12}) \circ [S]_0$ は $q_p = 0$ で正則である. よって P^{12}/H^{12} は modular 形式である事が示された.

以上により, P^{12}/H^{12} は weight 0 の modular 形式である事が分かった. よって, Lemma より $P^{12}/H^{12} = C \in \mathbb{C}$ と書ける. 故に P/H は有限集合 $\{z \in \mathbb{C}; z^{12} = C\}$ の値のみをとる. ここで, P, H は共に連続であるから, P/H も連続となる. よって $P/H = C'$ と書ける. この C' は 0 でない. それは $P \neq 0$ である事から明らかである. 従って $H = \frac{1}{C'} P$ となり, H が weight $p-1$, level p の modular 形式である事が証明された.

参考文献

[1] Anthony W. Knapp : "Elliptic Curves", Princeton University Press, Mathematical Notes 40, pp.222-267, 1992

[2] Erich Hecke : "Herleitung des Euler-Produktes der Zetafunktion und einiger L-Reihen aus ihrer Funktionalgleichung. WERKE", Göttingen Vandenhoeck & Ruprecht, pp.936-938 , 1983

[3] André Weil : "Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88, pp.14-21, 1976

[4] Neal Koblitz : "Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, GTM.97, pp.108-136, 1984