

空気混入水流特性に基づく階段状水路の水理設計法の開発

Development of Hydraulic Design for Stepped Channels based on Aerated Flow Characteristics

高橋正行¹

Masayuki Takahashi¹

Abstract: Stepped channel flows are generally characterized as aerated flows. For the design of stepped channels, it is important to know the aerated flow characteristics such as the aerated flow depth, the air-concentration ratio, the aerated flow velocity, and the energy head in skimming flows. In this study, the author has clarified the aerated flow characteristics both for the quasi-uniform flow region and for the nonuniform flow region under a wide range of hydraulic conditions. Also, the author has developed the hydraulic design method for stepped channels.

1. はじめに

急傾斜地の水路や堰・ダムを流下する高速流を傾斜面上で減勢させる方法として階段状水路の利用は有効である。階段状水路の skimming flow (各ステップ隅角部で常に渦の形成される流況)⁽¹⁾では、水路に流入した流れは平坦な傾斜水路よりも短い流下距離で水面から空気が混入しはじめる。この位置を inception point (空気混入開始位置) と呼び、その下流側では空気混入流となる(図 1)。この空気混入流は不等流区間(nonuniform flow)を経て各ステップ上の水深と流速が繰り返す同じ大きさになる擬似等流(quasi-uniform flow)となる(図 1)。

階段状水路の水工設計のためには、擬似等流区間ならびに不等流区間の空気混入 skimming flow の特性(空気混入流水深、流速、エネルギー水頭)を知ることが重要である。

従来、空気混入 skimming flow においては、水深、流速、エネルギー水頭の評価が困難であった。2000 年頃から空気混入流の流速測定が可能となったが、aerated flow のエネルギー評価までは至らなかった。また、階段状水路の空気混入不等流の水面形状は、解析的には求められないと考えられていた⁽²⁾。

著者は水路傾斜角度 $\theta=19^\circ\sim 55^\circ$ の階段状水路に対して、設計流量のときに推奨されている相対ステップ高さ $S/d_c \geq 0.2$ (S : ステップ高さ, d_c : 限界水深 $d_c=(q_w^2/g)^{1/3}$; g : 重力加速度; q_w : 水の単位幅流量) の skimming flow の空気混入流(図 1)を対象に、擬似等流および不等流の両区間の空気混入 skimming flow の特性を明確にした^{(3)~(7)}。特に、不等流区間については解析的に空気混入流の水面形を求める方法を開発し^{(8),(9)}、その妥当性を実験的に確かめた。これによって、空気混入流水深および比エネルギーなどの流下方向変化の算定が可能になった。また、擬似等流および不等流両区間の aerated flow に対し、水路傾斜角度 θ および相対ステップ高さ S/d_c が水深、流速、比エネルギーなどの空気混入流の特性量に与える影響が明らかにされ、階段状水路の合理的水工設計が可能になった。

2. 実験

空気混入 skimming flow (図 1) の特性を知るための実験は擬似等流⁽¹⁾については表 1(a)、 $\theta=55^\circ$ の不等流については表 1(b)の条件のもとで実施した。また、 $\theta=18^\circ$ と 27° の不等流については、Bung の実験結果⁽¹⁰⁾を用いた。時間平均空気混

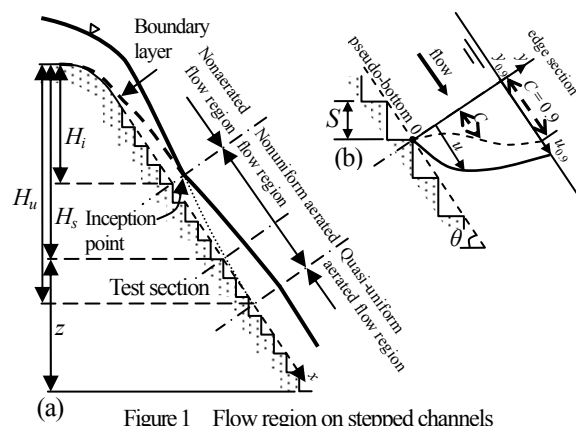


Figure 1 Flow region on stepped channels

Table 1 Test conditions

(a) Quasi-uniform flow region

θ [deg]	S [cm]	d_c [cm]	S/d_c [-]	$R \times 10^{-4}$ [-]	H_{dam} [cm]
19°	1.25	4.2	0.3	3	85
	4.0	4.1-7.3	0.55-0.98 [= $(S/d_c)_s$]	3-6	95
	5.0	6.7-11.6	0.43-0.75	5-12	280
30°	2.5	5.0-8.3	0.3-0.5	4-9	280
	5.0	6.7-8.0	0.62-0.75	5-7	280
	10.0	9.8-11.8	0.85-1.0 [= $(S/d_c)_s$]	8-15	280
55°	1.25	4.2-6.2	0.2-0.3	3-4	249
	2.5	5.0-6.3	0.4-0.5	3-6	249
	5.0	4.6-7.2	0.7-1.1 [= $(S/d_c)_s$]	4-6	249

Note: H_{dam} = 総落差, $(S/d_c)_s$ = skimming flow 上限の S/d_c の値

(b) Non-uniform flow region

θ [deg]	S [cm]	d_c [cm]	S/d_c [-]	$R \times 10^{-4}$ [-]	H_{dam} [cm]
55°	1.25	6.3	0.2	5	349
	2.5	5.0-8.3	0.3-0.5	4-9	349
	5.0	7.1-10.0	0.5-0.7	6-8	349

入率 C [= 空気の体積/(空気の体積+水の体積)] と流速 u の測定は二点電極型ボイド率計 (測定時間間隔 $20\mu\text{sec}$, 測定時間 20sec) を用い、aerated flow の流速 u , 空気混入率 C , およびエネルギーの評価断面をエッジ断面(図 1b 参照)とした。なお、 y は仮想底面 x 軸(図 1 参照)に垂直な距離、 $y_{0.9}$ は aerated flow depth であり $C=0.9$ となる y の値である。堤頂から評価断面までの仮想底面に沿った流下距離 x_s は鉛直距離

1: 日大理工・教員・土木

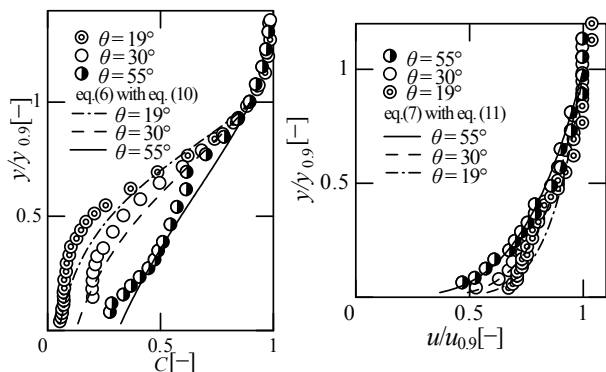


Figure 2 Profiles of air concentration for $S/d_c = 0.5$

Figure 3 Profiles of aerated flow velocity for $S/d_c = 0.5$

H_s (図 1 参照) を用い, $x_s = H_s / \sin\theta$ として算出した.

3. 空気混入開始位置

空気混入開始位置(inception point)はステップ隅角部において水路横断方向全体に空気が入り始めた最上流側の断面と定義されている. 断面平均空気混入率 C_m は次式で定義され inception point での C_m の値 C_{mi} は $C_{mi} \approx 0.2$ である.

$$C_m = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} C dy \quad (1)$$

階段状水路における inception point までの流下距離 $x_i = H / \sin\theta$: H_i は inception point までの落差(図 1 参照)と inception point での clear water depth d_{wi} については, 従来, (2) の関係式⁽²⁾で実験値が整理がされている.

$$\frac{x_i}{Scos\theta}, \frac{d_{wi}}{Scos\theta} = func(F_*) \quad (2)$$

ここに, $F_* = [q_w / (g \sin\theta (Scos\theta)^3)]^{1/2}$ は roughness Froude 数と呼ばれている. (2)式の関係で本実験結果を整理すると $x_i / Scos\theta$ と $d_{wi} / Scos\theta$ は θ に関わらず(3), (4)式で表示される.

$$x_i / (Scos\theta) = 4.7F_*^{0.94} \quad (3)$$

$$d_{wi} / (Scos\theta) = 0.35F_*^{0.60} \quad (4)$$

4. 擬似等流状態の空気混入流特性

4. 1 空気混入率および流速分布

擬似等流区間の skimming flow の空気混入率 C と無次元流速 $u/u_{0.9}$ は次の関係で整理される^{(3),(7)}.

$$C, u/u_{0.9} = func(y/y_{0.9}, S/d_c, \theta) \quad (5)$$

ここに, $u_{0.9}$ は $y_{0.9}$ での流速 u である. C の実験値を(5)式の関係で整理すると, C の分布は気泡の拡散モデル(6)式^{(2)b}とほぼ一致している(図 2 参照).

$$C = 1 - \tanh^2(k' - Y/2D') \quad (6)$$

ここに, $Y = y/y_{0.9}$, $D' = (0.848C_m - 0.00302) / (1 + 1.1375C_m - 2.2925C_m^2)$, $k' = \tanh^{-1}(0.1)^{1/2} + 1/(2D')$ である.

$u/u_{0.9}$ の実験値を(5)式の関係で整理すると, $u/u_{0.9}$ の分布は $1/N$ 乗則[(7)式]で示される^{(5),(7)}.

$$u/u_{0.9} = (y/y_{0.9})^{1/N} \quad (7)$$

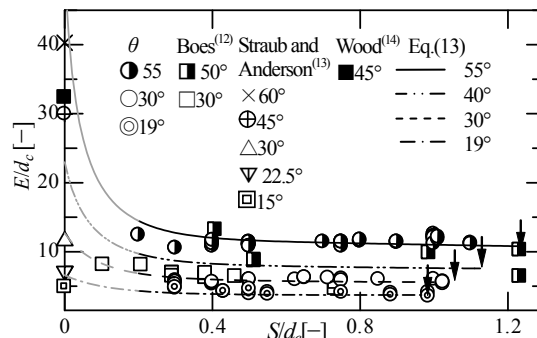


Figure 4 Specific energy of aerated flow in skimming flow; upper limit of skimming flow (↓)

擬似等流区間の skimming flow の断面平均空気混入率 C_{mu} と N の値は, $Re_c \geq 3 \times 10^4$ の場合, $C_{mu}, N = func(S/d_c, \theta)$ の関係で整理され, C_{mu} と N の実験式はそれぞれ, (8)式と(9)式で示される^{(5),(7),(9)}.

$$C_{mu} = (6.9/\theta - 0.12)(S/d_c) + 0.656 \{1 - e^{-0.0356(\theta - 10.9)}\} + 0.073 \quad (\theta \text{ in deg.}, R^2 = 0.88) \quad (8)$$

$$N = 14\theta^{-0.65} (S/d_c) \{ (100/\theta)(S/d_c) - 1 \} - 0.041\theta + 6.27 \quad (\theta \text{ in deg.}, R^2 = 0.91) \quad (9)$$

ここに, R^2 は決定係数である.

edge を結んだ仮想底面に作用するせん断応力 τ_0 は仮想底面上の流体を検査部に選り運動量方程式を適用すると $\tau_0 = \rho_w g d_{wu} \sin\theta$ が得られ, これと $f_u = 8\tau_0 / (\rho_w V_w^2) [V_w = q_w / d_w; q_w$ は単位幅流量] から次式が得られる⁽⁷⁾.

$$f_u = 8(d_{wu} / d_c) \sin\theta \quad (10)$$

なお, d_{wu} は擬似等流状態の clear water depth [$d_{wu} = \int_0^{y_{0.9}} (1 - C) dy$] であり, C の測定値から求められる. f_u の測定結果を $f_u = func(S/d_c, \theta)$ の関係で整理すると f_u の実験式は次式で示される⁽⁹⁾.

$$f_u = (-9.2\theta \times 10^{-4} + 0.12) \tanh(4S/d_c) + 3.8\theta^2 \times 10^{-5} - 4.4\theta \times 10^{-3} + 0.135 \quad (\theta \text{ in deg.}, R^2 = 0.77) \quad (11)$$

4. 2 空気混入流の比エネルギー

比エネルギーの評価断面を図 1(b)のように定める. 比エネルギー E_s は空気混入流を連続体として取り扱うこととし, 空気混入率の変化を密度変化として表わすものとするとき次式のように示される^{(1),(4),(7),(11)}.

$$E_s = \frac{\int_0^{y_{0.9}} [\rho g y \cos\theta + p] u dy}{\int_0^{y_{0.9}} \rho g u dy} + \frac{\int_0^{y_{0.9}} \left[\frac{1}{2} \rho u^3 \right] dy}{\int_0^{y_{0.9}} \rho g u dy} \quad (12)$$

ここに, p はエネルギー評価断面での空気混入流中の圧力 ($p = \int_y^{y_{0.9}} \rho g \cos\theta dy$) であり, ρ は空気混入流の密度 [$\rho = (1 - C)\rho_w$; ρ_w は水の密度] である. 比エネルギー E_s を clear water depth d_w および断面平均流速 $V_w (= q_w / d_w)$ で表すと, (12)式は補正係数 C_v および C_p を用いて次のように示される^{(4),(7),(11)}.

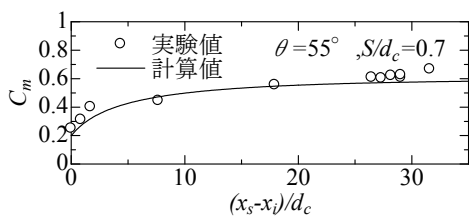


Figure 5 Depth average air-concentrations

$$E_s = C_p d_w \cos \theta + C_v V_w^2 / (2g) \quad (13)$$

(13)式中の補正係数 C_p と C_v はそれぞれ次のように示される。

$$C_p = \frac{\int_0^1 \left[(1-C)Y + \int_Y^1 (1-C)dY \right] UdY}{\left(1 - \int_0^1 CdY \right) \int_0^1 (1-C)UdY} \quad (14)$$

$$= \frac{\int_0^{y_{0.9}} (\rho_w g y \cos \theta + p) u dy}{\int_0^{d_w} (\rho_w g y \cos \theta + p_w) V_w dy}$$

$$C_v = \frac{\left(1 - \int_0^1 CdY \right)^2 \int_0^1 (1-C)U^3 dY}{\left[\int_0^1 (1-C)UdY \right]^3} = \frac{\int_0^{y_{0.9}} \frac{1}{2} \rho u^2 u dy}{\rho_w q_w \frac{1}{2} V_w^2} \quad (15)$$

ここに、 p_w は clear water flow の圧力 $\left(p_w = \int_y^{d_w} \rho_w g \cos \theta dy \right)$,

$U = u/u_{0.9}$ である。

(14)式より、 C_p は断面を通過する空気混入流のポテンシャルエネルギーと圧力のなす仕事の和と clear water flow のそれらの和との比と解釈される⁽⁷⁾。また(15)式より、 C_v は断面を通過する空気混入流の運動エネルギーと clear water の運動エネルギーの比と解釈される⁽⁷⁾。(14)、(15)式より C の分布 $C(Y)$ と $U(=u/u_{0.9})$ の分布 $U(Y)$ が得られると C_v と C_p の値を求めることができる⁽⁴⁾⁽⁷⁾。

空気混入率 C と流速 u の測定値を用い(13)、(14)から d_w および V_w 、(14)、(15)式から C_v および C_p を求め、(13)式を用いて空気混入流の比エネルギー E_s/d_c を算出した結果を図4に示す。図に示されるように、 E_s/d_c の θ と S/d_c による変化が示され、与えられた S/d_c に対して θ を大きくすると E_s/d_c は大きくなる。

5. 空気混入不等流の空気混入流特性

5.1 断面平均空気混入率の変化特性

Inception point 下流側の空気混入不等流の C_m の変化について検討する。気相の連続式は(16)式で示されている^{2)c}。

$$\frac{1}{(1-C_{mu})^2} \ln \left(\frac{1-C_m}{C_{mu}-C_m} \right) - \frac{1}{(1-C_{mu})(1-C_m)} = k_0 \frac{x_s/d_c - x_i/d_c}{d_w/d_c} + K_0 \quad (16)$$

ここに、 $k_0 = u_r d_w \cos \theta / q_w$ 、 $K_0 = 1/(1-C_{mu}) [1/(1-C_{mu}) \ln \{(1-C_m)/(C_{mu}-C_m)\} - 1/(1-C_m)]$ 、 C_m は任意断面での断面平均空気混入率、 u_r は気泡の上昇速度である。(16)式より、境界条件として inception point での断面平均空気混入率 $C_{mi} (\approx 0.2)$ を与え、さらに擬似等流状態の断面平均空気混入率 C_{mu} および気泡の上昇速度 u_r を与えると、空気混入不等流の任意断面

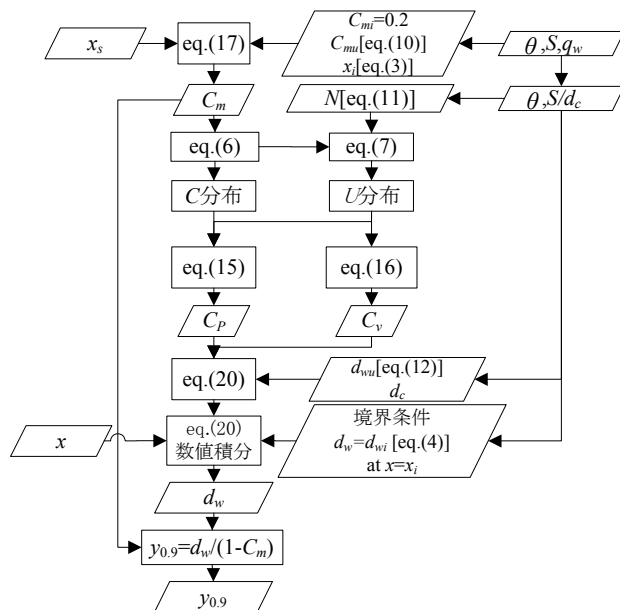


Figure 6 Flowchart for estimating d_w and $y_{0.9}$

$(x_s - x_i)/d_c$ での C_m の値を求めることができる。ここでは、 $u_r = 0.4 \text{ m/s}$ としている^{2)c}。 $\theta = 55^\circ$ の場合の計算結果の一例を図5の実線に示す。図に示されるように、計算値は実験値を満足している。また、 $\theta = 18^\circ$ と 27° についても気相の連続式(16)式による C_m の計算値は Bung による C_m の実験値⁽¹⁰⁾ を満足していることが確かめられた。すなわち、広範囲な水路傾斜角度 ($18^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$) の skimming flow に対して(16)式は適用可能である。

なお、不等流区間の空気混入率分布については、(16)式から求められた C_m を気泡の拡散モデル(6)式に代入して得られた結果が実験値とほぼ一致することが確かめられた。

5.2 流速分布

不等流区間の流速分布については、与えられた θ と S/d_c に対して、不等流区間および擬似等流区間ともに N の値はほぼ等しく、不等流区間においても擬似等流区間の N の実験式⁽⁷⁾ [(9)式]を適用できることが確かめられた。

5.3 空気混入不等流の水面形

空気混入不等流の水面形を表示する式を導く。なお、空気混入流を連続体として取り扱い、空気混入率の変化を密度変化として表わすものとする。全水頭 E は次式のように示される⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

$$E = z + C_p d_w \cos \theta + C_v \frac{V_w^2}{2g} \quad (17)$$

損失水頭 $dh_L = (f/4)(dx/d_w)V_w^2/(2g)$ を用いて表示し、不等流区間と擬似等流区間の抵抗係数の値が等しいものと仮定すると次式が得られる。

$$\frac{d d_w}{dx} = \frac{\left(\frac{d_w}{d_c} \right)^3 \sin \theta - \left(\frac{d_w}{d_c} \right)^3 \sin \theta - \left(\frac{d_w}{d_c} \right)^4 \frac{d C_p}{d(x/d_c)} \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{d_w}{d_c} \frac{d C_v}{d(x/d_c)}}{C_p \left(\frac{d_w}{d_c} \right)^3 \cos \theta - C_v} \quad (18)$$

(18)式中の各項のオーダーの比較をすると、射流では $d_w/d_c < 1$ であり、 $(d_w/d_c)^4 [d C_p/d(x/d_c)] \cos \theta$ は他の項より小さく、また $d C_v/d(x/d_c)$ は分子第一項に比べて十分に小さく両項と

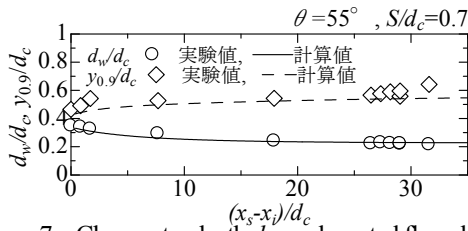


Figure 7 Clear water depth d_w and aerated flow depth $y_{0,9}$

もに無視できることが確かめられる⁽⁸⁾。したがって、(18)式は次のように示される⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

$$\frac{dd_w}{dx} = \sin \theta \frac{d_w^3 - d_{w0}^3}{C_p d_w^3 \cos \theta - C_v d_c^3} \quad (19)$$

なお、水のみの流れ($C=0$)の場合は $C_p=1$, $C_v=\alpha \approx 1$ (α はエネルギー補正係数) となり、(19)式は広長方形断面の水面方程式と一致する。

(19)式を用いて空気混入流の特性量を求めるフローチャートを図6に示す。図6に基づき d_w を計算した結果を図7実線に示す。図7に示されるように、計算値は実験値とほぼ一致している。

空気混入流の代表水深としては、clear water depth d_w は仮想の水深であるため $y_{0,9}$ を用いることが妥当である⁽²⁾⁻⁽⁹⁾。本計算によるclear water depth d_w と C_m の値を $y_{0,9}=d_w(1-C_m)$ に代入すると $y_{0,9}$ が得られる(図7破線参照)。図7に示されるように、 $\theta=55^\circ$ の場合の計算値と実験値の $y_{0,9}/d_c$ はほぼ一致し、空気混入流水深 $y_{0,9}/d_c$ は $(x_s-x_i)/d_c$ の増加とともに大きくなり、やがて一定値に漸近する。なお、 $\theta=18^\circ$ と 27° の場合も計算値と実験値はほぼ一致していることが Bung の実験結果⁽¹⁰⁾ から確かめられた。すなわち、 $18^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ の skimming flow に対して本解析法が適用可能である。

5. 4 空気混入不等流の比エネルギー

仮想底面を基準面とした空気混入不等流の比エネルギー E_s は(13)式で求められる。すなわち、本解析手法を用いて d_w および V_w を求め、(6), (7), (9), (14), (15), (16)式から C_v および C_p を求め、(13)式を用いて空気混入流のエネルギー水頭 E_s/d_c を算出できる(図8a)。図8(a)に示されるように計算値は実験値と一致し、与えられた θ と S/d_c に対して、不等流区間においては $(x_s-x_i)/d_c$ の増加に伴い E_s/d_c が大きくなり、擬似等流区間において E_s/d_c はほぼ一定となる。また、与えられた θ に対して、 S/d_c を変化させた E_s/d_c の計算によると、相対ステップ高 S/d_c の増加に伴い E_s/d_c は小さくなるが、 $0.5 \leq S/d_c \leq (S/d_c)_c$ ($(S/d_c)_c$ は skimming flow となる上限の S/d_c の値) の範囲では E_s/d_c に対する S/d_c の影響は小さくほぼ一定となっている(図8(b)参照)。さらに水路傾斜角度 θ を変化させた計算によると、与えられた S/d_c と $(x_s-x_i)/d_c$ に対して θ の増加とともに E_s/d_c の値は増加することが確かめられる(図8(b)参照)。

6. まとめ

階段状水路の設計に重要である水路傾斜角度 $\theta = 19^\circ \sim 55^\circ$ 、相対ステップ高さ $S/d_c = 0.2 \sim (S/d_c)_c$ の aerated skimming flow に対して、空気混入流水深として空気混入率 $C=0.9$ となる水深 $y_{0,9}$ を用いると擬似等流および不等流ともに流速分布、空気混入率分布の評価が適切に行えることを示した。

擬似等流空気混入流については aerated flow の空気混入流水

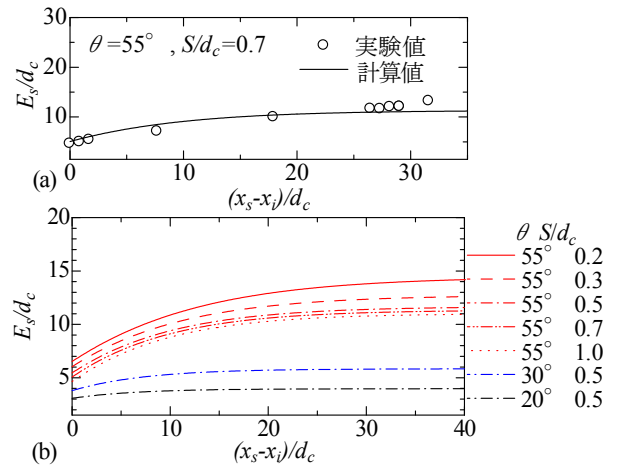


Figure 8 Specific energy of aerated flows

深および比エネルギーを求めることができた。不等流区間の aerated skimming flow に対しては、従来不可能と考えられていた水面方程式の導出に成功し、実験値と解析的に得られた計算値とが一致していることを確かめた。その結果、空気混入不等流の空気混入流水深および比エネルギーの流下方向変化を求めることができた。すなわち、空気混入 skimming flow を形成する全領域の水利特性を明確にできた。

本研究によって種々の θ , S , q_w , x_s に対して階段状水路の skimming flow の擬似等流および不等流区間の C_m , d_w , $y_{0,9}$, E_s を予測することが可能になった。このことより、階段状水路の土工設計に必要な水深、流速、空気混入率、比エネルギーを定量的に決められるようになった。

参考文献

- [1]Ohtsu, I., Yasuda, Y., Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels, *J. Hydr. Eng.*, 130(9), 860–869, 2004.
- [2]Chanson, H.: *The hydraulics of stepped chutes and spillways*, AA.Balkema, Lisse, The Netherlands, a) 148, b) 154, c) 172–175, 2002.
- [3]Takahashi, M., Yasuda, Y., Ohtsu, I.: Effect of Reynolds Number on Characteristics of Skimming Flows in Stepped Channels, *Proc. of 31st IAHR Cong.*, 2880–2889, 2005.
- [4]高橋, 安田, 大津: 階段状水路における空気混入射流の特性, 水工学論文集, 土木学会, 49, 829–834, 2005.
- [5]高橋, 安田, 大津: 階段状水路における空気混入射流の特性に対するレイノルズ数の影響, 水工学論文集, 土木学会, 50, 871–876, 2006.
- [6]Takahashi, M., Gonzalez, C. A., Chanson, H.: Self-aeration and turbulence in a stepped channel: Influence of cavity surface roughness, *Int. J. Multiphase Flow*, Elsevier, 32, 1370–1385, 2006.
- [7]Takahashi, M., Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *J. Hydr. Res.*, 50(4), 427–434, 2012.
- [8]高橋, 大津: 階段状水路における不等流区間の空気混入流特性, 土木学会論文集B1(水工学), 67(4), I_1123–I_1128, 2011.
- [9]Takahashi, M., Ohtsu, I.: Discussion of stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin length, *J. Hydr. Res.*, 49(3), 404–408, 2011.
- [10]Bung, D. B.: Developing flow in skimming flow region on embankment stepped spillways, *J. Hydr. Res.*, 49(5), 639–648, 2011.
- [11]Takahashi, M., Yasuda, Y., Ohtsu, I.: Discussion of an experimental investigation of jet flow on a stepped chute, *J. Hydr. Res.*, 44(6), 857–860, 2006.
- [12]Boes, R. M., *Zweiphasenströmung und Energieumsetzung auf Großkaskaden*, Ph.D thesis, ETH, Zürich, Switzerland, 2000. (in German)
- [13]Straub, L. G and Anderson, A. G.: Experiments on Self-Aerated Flow in Open Channels, *J. Hydr. Div.*, 84(HY7), 1–35, 1958.
- [14]Wood, I. R.: *Air Entrainment in Free-Surface Flows*, Balkema, Rotterdam, 1991.