P-11

非加法的測度の正則性について

日本大学理工学部非常勤講師　渡辺 俊一

Li, 安田, Song は [3] において 完備距離空間上の零加法的なファジイ Borel 測度の場合にラドン（強正則）性が成り立つことを示した. [1] において河邊は Riesz 空間が多重 Egoroff 性を持つ場合に完備ないし局所コンパクト距離空間上の零加法的な Riesz 空間に値を取る Fuzzy 測度がラドン性（強正則性）をもつことを示した. 他方 [2] において, Li と mesir により非加法的測度が Egoroff の定理と psuedmetric generating property を満たす場合に測度の正則性が得られることが示された.

本講演では, 非加法的測度において, 測度が Egoroff の定理と psuedmetric generating property を満たす場合, 完備または局所コンパクトである可分な距離空間上でラドン（強正則）性が得られることを報告する. 主に実数値の場合での結果を述べるが, 半順序線形位相空間に値を取る場合についても言及したい.

以下, 自然数全体を N, 実数全体を R, $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする.

Def 1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to R$ は
(i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) A, $B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすとき, 非加法的測度 *(non-additive measure)* という. 以下 μ は非加法的測度とする.

Def 2. (1) 集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \downarrow A$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ を満たすとき, μ は上から連続 *(continuous from above)* という.
(2) 集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \uparrow A$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ を満たすとき, μ は下から連続 *(continuous from below)* という.
(3) μ が上から連続かつ下から連続である場合, ファジイ測度であるという.
(4) 集合 μ が弱零加法的であるとは $A, B \in \mathcal{F}$ が $\mu(A) = \mu(B) = 0$ であるとき $\mu(A \cup B) = 0$ となることをいう.
(5) 集合 μ が *pseudometric generating property* を満たすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在し, 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ について $\mu(A) \vee \mu(B) < \delta$ ならば $\mu(A \cup B) < \varepsilon$ となることである.

Def 3. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする.
(1) *2* 重集合列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ は
(D1) $m, n, n' \in \mathrm{N}$ で $n \leq n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m,n'}$
(D2) $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}) = 0$
を満たすとき, $\mathcal{F}$ において μ*-regulator* であるという.
(2) μ が *Egoroff* 条件を満たすとは任意の μ*-regulator* $\{A_{m,n}\}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正の整数列 $\{n_m\}$ が存在し $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,n_m}) < \varepsilon$ となることである.

以下の定理が成立している [4].

Theorem 1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする. このとき次の条件は同値である:
(i) Egoroff の定理が μ に対して成立する.
(ii) μ は Egoroff 条件を満たす.

Def 4. $\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度. μ が正則であるとは任意の $\varepsilon > 0$ と $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し, 閉集合 F_ε と開集合 G_ε が存在し $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ と $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たす.

X を Hausdorff 空間. $\mathcal{B}(X)$ により X の Borel 部分集合からなる σ 体, すなわちの開集合からなる σ 体. $\mathcal{B}(X)$ 上で定義される非加法的測度を X 上の非加法的 Borel 測度という. このとき以下の が成立する.

Li と Mesiar [2] により以下の結果が得られる.

Theorem 2. X を距離空間とし, $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の *Egoroff* 条件と *psuedmetric generating property* を満たす 非加法的 *Borel* 測度とする. このとき μ は正則.

Def 5. $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度とする.
(1) μ がラドン *(*強正則*)* 性をもつとは各 $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し, コンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n\in N}$ と開集合の列 $\{G_n\}_{n\in N}$ が存在しすべての $n \in N$ について $K_n \subset A \subset G_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus K_n) = 0$ が成り立つ.
(2) μ が *tight* であるとはコンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n\in N}$ が $\lim_{n\to\infty} \mu(S \setminus K_n) = 0$ を満たすことである.

Li, 安田, Song [3] と 河邊 [1] のファジイ測度における結果から, 非加法的測度が Egoroff 条件と psuedmetric generating property を満たす場合にもラドン（強正則）性の成立が予期されるが実際, 以下の 2 つの主張が成り立つ.

Theorem 3. *X を完備可分な距離空間とし, $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の非加法的 Borel 測度とする. μ が弱零加法的で Egoroff 条件を満たすならば μ は tight. さらに μ が pseudmetric generating property と Egoroff 条件を満たすならば μ はラドン性をもつ.*

Theorem 4. *X を局所コンパクトで可分な距離空間とし, $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の非加法的 Borel 測度とする. μ が pseudmetric generating property と Egoroff 条件を満たすならば μ はラドン性をもつ.*

References

[1] J. Kawabe, The Alexandroff theorem for Riesz space-valued non-additive mesures. *Fuzzy sets and Systems* **158**(2007) 2413–2421.

[2] J. Li and R. Mesiar, *Lusin's theorem on monotone measure spaces,* Fuzzy Sets and Systems **175** (2011), 75–86.

[3] J. Li, M. Yasuda and J. Song, Regularity properties of null-additive fuzzy measure on metric spaces, in: Torra, V., Narukawa, Y., Miyamoto, S. (Eds.), *Lecture Notes in Artificial Intelligence,* Vol. 3558, Springer, Berlin, 2005 59–66.

[4] T. Murofushi, K. Uchino and S. Asahina, *Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory,* Fuzzy Sets and Systems **146** (2004), 135-146.

(渡辺 俊一)
E-mail address: `wa-toshi@mti.biglobe.ne.jp`