

階段状水路における nonaerated skimming flow の水面形方程式  
 Gradually varied flow equation for nonaerated skimming flows in stepped channels

○山元雄生<sup>1</sup>, 高橋正行<sup>2</sup>

○Yuki Yamamoto<sup>1</sup>, Masayuki Takahashi<sup>2</sup>

Abstract: For hydraulic design of stepped channels, it is important to know the nonaerated skimming flow depth and the boundary layer development. However, a gradually varied flow equation for nonaerated skimming flows has not yet been established. This report presents an analytical equation for free surface profiles of nonaerated skimming flows with an empirical equation for boundary layer developments.

1 まえがき

急傾斜地の水路や堰・ダムを流下する高速流を傾斜面上で減勢させる方法として階段状水路は利用される [1], [2]. 階段状水路に流入して skimming flow (各ステップ隅角部で常に渦の形成される流況 [1]) が形成された場合、底面から乱流境界層が発達し、ある程度の距離を流下した断面で乱流境界層が水面に到達する (Fig.1). この断面を inception point (以下 I.P. と略す) という. この断面より下流側では水面から空気が混入し aerated flow となる. すなわち, skimming flow は I.P. より上流側の nonaerated skimming flow と I.P. より下流側の aerated skimming flow に区別される.

低いダムや embankment dam などの低落差の階段状洪水吐で大流量の越流が生じたとき、階段状水路上の流れが全て nonaerated skimming flow の流況となり、この場合の対応が水工設計上必要となる. しかしながら、nonaerated flow の水面形は実験式が提案されている [3] もの、解析的な水面形方程式は示されていない. 本研究では、階段状水路の nonaerated skimming flow の乱流境界層の発達程度は実験式で近似し、水面形については解析的に求めた.

2 実験

実験は Table1 に示す条件の nonaerated flow 領域を対象に行われた. 流速  $u$  の測定にはピトー管 (管径 3mm:JIS-B8330 規格), 水深  $d$  の測定にはポイントゲージを用いた. ここに、 $d_c$  は限界水深 ( $d_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ ),  $q$  は水の単位幅流量,  $g$  は重力加速度,  $H_{dam}$  はダム高さ,  $S$  はステップ高,  $\theta$  は水路傾斜角度である.

3 流速分布

Fig.2 に nonaerated flow の乱流境界層内の流速分布を  $u/U = f(y/\delta)$  の関係で整理した一例を示す. ここに、 $\delta$  は乱流境界層厚さ,  $U$  は乱流境界層外縁流速である. なお、 $\delta$  は  $u = 0.99U$  となる高さで定義している. Fig.2 に示されるように、乱流境界層内の流速分布は次式に示す  $1/N$  乗則で近似され、 $N$  の値は流下距離  $x/d_c$  によらず一定である.

$$u/U = (y/\delta)^{1/N} \quad (0 \leq y \leq \delta) \quad (1)$$

Takahashi and Ohtsu [2] は aerated flow における  $N$  の値を求める実験式を次のように提案している.

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left( \frac{100}{\theta} \frac{S}{d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (2)$$

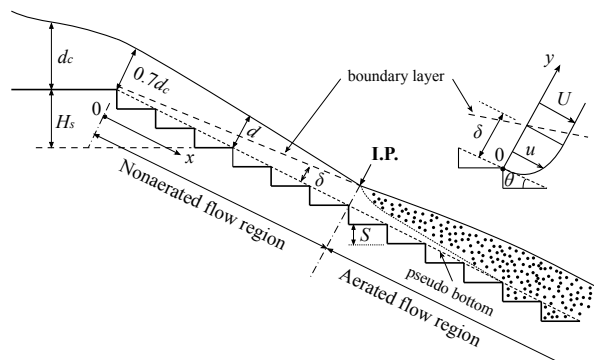


Figure1: Flow regions of skimming flow

Table1: Experimental condition

$\theta$ (deg)	$S$ (cm)	$H_{dam}$ (cm)	$S/d_c$
19,30	0.0	36.0	0.0
	1.5	36.0	0.2~0.3
	3.0	60.0	0.4~0.5
	6.0	36.0	0.8~0.9

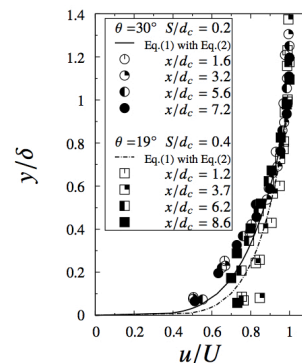


Figure2: Velocity profile

(1) 式に (2) 式を代入して得られた  $u/U$  を Fig.2 の実線に示す. 図に示されるように、実線は実験値をほぼ満足している. これより、 $N$  の値は空気混入の有無や  $x/d_c$  に関わらず、与えられた  $\theta$  と  $S/d_c$  によって (2) 式から求められる.

4 乱流境界層の発達状態

平坦な傾斜水路において、 $\delta$  は次元解析的考察より次式によって近似される [4].

$$\delta/x = a(x/k)^{-b} \quad (3)$$

ここに、 $a, b$  は定数,  $k$  は壁面の平均凹凸高さである. 階段状水路においては、 $k$  を階段の凹凸によるものとみなすと  $k = S \cos \theta$  となり、 $\delta$  は (3) 式で近似できる.

連続の式より次式が得られる.

$$U = q\{d - \delta/(N + 1)\}^{-1} \quad (4)$$

1:日大理工・院(前)・土木 2:日大理工・教員・土木

境界条件  $x = x_i, d = \delta = d_i, U = U_i$  を (3), (4) 式に代入すると,

$$d_i = a(x_i^{-b+1}/k^{-b}), \quad (5)$$

$$U_i = \{(N+1)/N\}(q/d_i). \quad (6)$$

ここに,  $x_i$  は階段傾斜始端から I.P. までの流下距離,  $d_i$  は I.P. での水深,  $U_i$  は I.P. における水表面の流速である.

階段状水路の傾斜始端 ( $x = 0$ ) と I.P. ( $x = x_i$ ) 間で自由水面の流線に沿ってベルヌーイの定理を適用し,  $x_i \sin \theta \gg (1.5d_c - d_i \cos \theta)$  と仮定すると,

$$U_i = \sqrt{2gx_i \sin \theta}. \quad (7)$$

(5) 式および (7) 式を (6) 式に代入すると,

$$\frac{x_i}{k} = \left( \frac{N+1}{N} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right)^{1/(1.5-b)} F_*^{1/(1.5-b)} \quad (8)$$

ここに,  $F_*$  は roughness Froude number であり,  $F_* = q/\sqrt{g \sin \theta k^3}$  で定義される. 高橋・大津<sup>[5]</sup> は  $x_i/k$  の実験式を次のように提案している.

$$x_i/k = 5.0F_*^{0.97} \quad (18^\circ \leq \theta \leq 53^\circ) \quad (9)$$

(8) 式および (9) 式より,  $a = 0.135(N+1)/N$ ,  $b = 0.469$  となり, それらの値を (3) 式に代入すると,

$$\delta/x = 0.135\{(N+1)/N\}(x/k)^{-0.469} \quad (18^\circ \leq \theta \leq 53^\circ) \quad (10)$$

$\delta/x$  は Fig.3 に示されるように, (10) 式で近似することができる ( $R^2 = 0.66$ ). なお, (10) 式を  $[\delta/d_c = f(x/d_c, S/d_c, \theta)]$  の関係に変数変換すると (11) 式になる. すなわち, 与えられた  $x, \theta, q, S$  に対して (2) 式と (11) 式を用いることで  $\delta$  が求められる.

$$\frac{\delta}{d_c} = 0.135 \frac{1+N}{N} \left\{ \left( \frac{S}{d_c} \right) \cos \theta \right\}^{0.469} \left( \frac{x}{d_c} \right)^{0.531} \quad (11)$$

## 5 水面形

各ステップエッジを結んだ仮想底面 (Fig.1) を考え, 階段状水路の傾斜始端 ( $x = 0$ ) と nonaerated flow region 内の評価断面 ( $x = x$ ) 間で自由水面の流線に沿ってベルヌーイの定理を適用する. 自由水面の流線については境界層外であるため, ポテンシャル流として扱えることから, 全水頭  $H$  は一定とする.

$$H = H_s + d \cos \theta + U^2/2g = \text{const}. \quad (12)$$

速度水頭に連続の式と排除厚さ  $\delta^*$  を用い, (12) 式を  $x$  で微分し,  $\{d_c/(d - \delta^*)\}^3 \gg \cos \theta$  とすると,

$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta - \frac{d_c^3}{(d - \delta^*)^3} \frac{d\delta^*}{dx}}{-\frac{d_c^3}{(d - \delta^*)^3}}. \quad (13)$$

(13) 式を積分し, 後述の実験結果から境界条件に  $x = 0$  のとき  $d/d_c \approx 0.7$  と  $\delta^*/d_c \approx 0$  を適用し,

$$d/d_c = \delta^*/d_c + \{0.7^{-2} + 2 \sin \theta (x/d_c)\}^{-0.5} \quad (14)$$

$\delta^* = \delta/(1+N)$  および (11) 式を (14) 式に代入することによって, 解析的に水面形方程式 [(15) 式] が得られる.

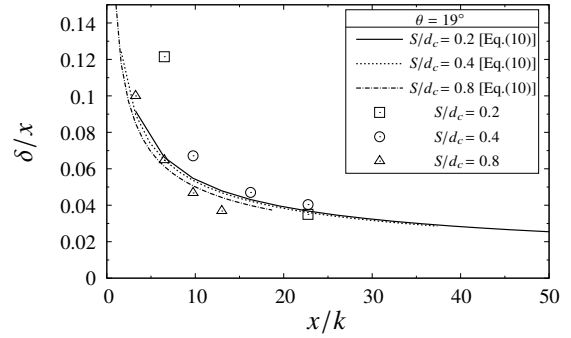


Figure3: Boundary layer thickness

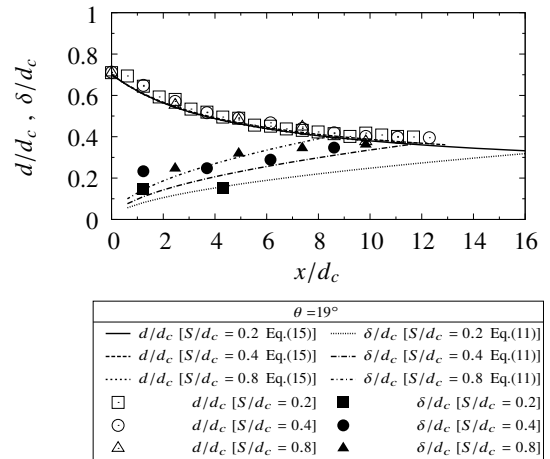


Figure4: Free surface and boundary layer profile

$$\frac{d}{d_c} = \frac{0.135}{N} \left\{ \left( \frac{S}{d_c} \right) \cos \theta \right\}^{0.469} \left( \frac{x}{d_c} \right)^{0.531} + \left\{ (0.7)^{-2} + 2 \sin \theta \left( \frac{x}{d_c} \right) \right\}^{-0.5} \quad (15)$$

与えられた  $x/d_c, \theta, S/d_c$  に対して,  $N$  の値は (2) 式より求め, nonaerated skimming flow の  $d/d_c$  を (15) 式より求めることができる.

Fig.4 に nonaerated flow の水面形と乱流境界層の発達状態の一例を示す. 図に示されるように, (15) 式により求めた  $d/d_c$  と実験値はほぼ一致している ( $R^2 = 0.97$ ). 以上より, 与えられた  $x, \theta, q, S$  に対して nonaerated skimming flow の  $N$  は (2) 式,  $\delta$  は (11) 式,  $d$  は解析的に (15) 式で求められるようになった.

## 参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., Takahashi, M.: "Flow characteristics of skimming flows in stepped channels.", *J. Hydraul. Engrg.*, Vol.130, No.9, pp860-869, 2004.
- [2] Takahashi, M., Ohtsu, I.: "Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes.", *J. Hydraul. Res.*, Vol.50, No.4, pp.427-434, 2012.
- [3] Meireles, I., Renna, F., Matos, J., Bombardelli, F.: "Skimming, non-aerated flow on stepped spillways over Rcc Dams.", *J. Hydraul. Engrg.*, Vol.138, No.10, pp.870-877, 2012.
- [4] Bauer, W.J.: "Turbulent boundary layer on steep slopes" *Trans. ASCE* 119, pp.1212-1233, 1954.
- [5] 高橋正行, 大津岩夫: "階段状水路における nonaerated skimming flow", 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.70, No.4, pp.I\_781-I\_786, 2014.