O-1

衝撃波型背景時空の下での双局所場
Bi-local field in a background-shock-wave metric

○神田直大[1]　仲滋文[2]
*Naohiro Kanda[1], Shigefumi Naka[2]

Abstract: It is known that the shock-wave gravity plays an important role in the scattering among ultra-high energies particles. In many papers, the discussions are made on the scattering of particles and of strings, from this shock-wave gravity. Recently, the importance of such a background metric is also recognized by pp wave background in the brane theory. In this paper, we study a bi-local field, a relativistic two-body bound system, in a background of shock-wave metric. The result shows the possibility that we can detect the effect of such a gravity through hadron-collision experiments even in the energy below the Planck energy.

1．はじめに

光速に近い速さで運動する粒子間の相互作用は, 衝撃波型背景時空に対応する重力による粒子の散乱と類似することが知られており [1], このような重力を介する散乱過程の解析は, 現在の高エネルギーの実験においても重要な研究課題の一つとなっている. この時空下での散乱の解析は 't Hooft による初期の試み [2] を始めとして, 弦理論によるもの等 [3] 多くの研究がなされており [4], プランクスケール程度の高エネルギーで有効な散乱過程となる. 一方, 近年の素粒子物理で多くの試みがなされている brane 理論の背景となる $AdS_5 \times S^5$ 時空において, pp wave と呼ばれる極限で衝撃波型時空と同様の構造が現れることが知られており, 対応する重力理論は素粒子の基本理論の構築においても興味深い [4].

本研究では相対論的二体の束縛系としての bi-local 場 (双局所場)[5] を取り上げ, これを曲がった時空の下に拡張し, 衝撃波型背景時空の下での bi-local 場の散乱過程を解析する. 結果として得られた遷移振幅から, 束縛状態の結合定数と終状態の性質に依存して, プランクエネルギーより低エネルギーであっても検証可能な散乱を生じる可能性があることを示唆する.

2．Bi-local 場模型 (Minkowski 時空[3])

bi-local 場模型の基礎となる力学系は, 作用

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int d\tau\left(\frac{1}{e_{(i)}(\tau)}\dot{x}_{(i)}^2 + V_0(\bar{x}^2)e_{(i)}(\tau)\right) \tag{1}$$

によって定式化される[4](以下 bi-local 場模型). ここで $e_{(i)}(\tau)$ は τ 空間の 1 脚子で, この変分から拘束条件

$$H = \frac{1}{4}P^2 + \bar{p}^2 - V_0(\bar{x}^2) = 0 \tag{2}$$

$$T = P\bar{p} = 0 \tag{3}$$

が得られる. ここで X^μ, P^μ, $\bar{x}^\mu$, $\bar{p}^\mu$ は, それぞれ $x_{(i)}$, $p_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta x_{(i)}}$ から作られる重心座標, 運動量, 相対座標, 運動量である. 次に相互作用 V_0 を

$$V_0(\bar{x}^2) = -\kappa^2\bar{x}^2, \quad (\kappa\text{は結合定数}) \tag{4}$$

のようにとって,

$$\bar{x}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}(a^{\dagger\mu} + a^\mu), \quad \bar{p}^\mu = i\sqrt{\frac{\kappa}{2}}(a^{\dagger\mu} - a^\mu),$$
$$[a^\mu, a^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu}, \quad [X^\mu, P^\nu] = i\eta^{\mu\nu},$$

と量子化すれば, 量子化された系において (2),(3) は波動方程式と補助条件に対応する. その際, 補助条件を期待値の意味で $\langle\Phi|T|\Phi\rangle = 0$ とすれば, 波動方程式と両立する

$$T^{(+)}|\Phi\rangle = P\cdot a|\Phi\rangle = 0 \tag{5}$$

が得られる. このような波動方程式と補助条件から Regge 的な線形関係 ($P^2 \propto J$) が再現されることが知られており, このため bi-local 模型はハドロンの有効模型としても用いられている.

3．Bi-local 場模型 (曲がった時空)

衝撃波型背景時空の計量は, 光的座標

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \quad x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \tag{6}$$

の下で, 時空の線素を

$$ds^2 = -2dx^-dx^+ + f(x_\perp)\delta(x^-)d^2x^- + d^2x_\perp \tag{7}$$

[1]日大理工・院（後）・物理
[2]日大理工・教員・物理
[3]$\mathrm{diag}(\eta) = (-1, +1, +1, +1)$
[4]ここで $x^\mu_{(i)}$ は $x^\mu_{(i)} = (x^0, x^1, x^2, x^3)_{(i)}$, $x^0 = t\ (c=1)$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ の意味である.

の形に表すものとして定義される $(x_\perp = (x^1, x^2))$. $f(x_\perp)$ は光的な粒子を源とする重力場方程式の解として

$$f(x_{(i)\perp}) = f_0 - \frac{8\sqrt{2}E_s}{E_p^2}\log\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (8)$$

の形に求まる [1](f_0, r_0 は定数, E_s は粒子のエネルギー, E_p はプランクエネルギー).

さて, 曲がった時空における相対論的二粒子系の作用を

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int d\tau\Bigg(\frac{1}{e_{(i)}(\tau)}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}_{(i)}\dot{x}^{\nu}_{(i)} + V_0(x_{(1)}, x_{(2)}, g_{\mu\nu})e_{(i)}(\tau)\Bigg) \quad (9)$$

のように与える. ここで相互作用は

$$\frac{d(x_{(1)}, x_{(2)})}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma g_{\mu\nu}(x(\sigma))\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma} \quad (10)$$

という測地的距離 (bi-scalar) を用いて

$$V_0(x_{(1)}, x_{(2)}, g_{\mu\nu}) = -2\kappa^2 d(x_{(1)}, x_{(2)}) - \omega \quad (11)$$

と定義する (ω は定数). これは $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ の極限で

$$d(x_{(1)}, x_{(2)}) = \frac{1}{2}\bar{x}^2 \quad (g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}) \quad (12)$$

となり, 平坦な時空の形に戻る.

4．正準変換

曲がった時空の場合も, 平坦な時空の場合と同様に拘束条件を得ることができるが, この場合の H は $\delta-$ 関数を含み特異性がある. しかし正準変換

$$U \equiv \exp\Big[-i\frac{1}{2}\Big\{\sum_{i=1}^{2} f(x_{(i)\perp})p^-_{(i)}\theta(x^-_{(i)})\Big\}\Big] \quad (13)$$

を行うと, 波動方程式と補助条件は

$$\tilde{H} = 4\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\{-2p^+p^- + (p_\perp - A)^2\}_{(i)} + \kappa^2\bar{x}^2 + \omega\right),$$
$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{2}(-)^{i-1}\{-2p^+p^- + (p_\perp - A)^2\}_{(i)} \quad (14)$$

となり, 単極子と結合する二粒子系に帰着する. ここで $A_{(i)} = Q\frac{x_\perp}{r^2}\theta(x^-_{(i)})p^-_{(i)}$, $r = \sqrt{x_\perp^2}$, $Q = \frac{4\sqrt{2}E_s}{E_p^2}$, $4\omega = m_0^2 - 16\kappa$ である.

5. 散乱振幅

変換後の $X^- = T^-$ を時間とする波動方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial T^-}|\tilde{\Phi}(T^-)\rangle = \frac{1}{2\alpha' P^-}\{\alpha'(P_\perp^2 + m_0^2) + a^\dagger\cdot a + \alpha'\Delta M^2\}|\tilde{\Phi}(T^-)\rangle \quad (15)$$

と書ける. ここで $\Delta M^2 = 2\sum_{i=1}^{2}(-\{P_\perp, A\} + A^2)_{(i)}$, $\alpha' = 1/(8\kappa)$ である. ここから, 遷移振幅が容易に得られる. また十分良い近似として $\alpha' Q = \frac{E_s}{\sqrt{2}\kappa E_p^2} \simeq 0$ とおき, 状態を $|\Phi_i\rangle = |P_{\perp a}\rangle\otimes|0\rangle$, $|\Phi_f\rangle = |P_{\perp b}\rangle\otimes|z_b\rangle$, $|z_b\rangle = e^{-z_b(a^+)^\dagger}|0\rangle$ のように選ぶと, 遷移振幅は

$$T_{ba} = e^{\frac{i}{2}f_0P_a^-}\int\frac{d^2X^-}{2\pi i}\frac{e^{-i(P_{\perp b}-P_{\perp a})\cdot X_\perp}}{(2\pi)^2}e^{-\frac{i}{2}P_a^-Q\log\left(\frac{X_\perp^2}{r_0^2}\right)} \times\left[1 - i\pi\alpha' P_a^- Q\delta^{(2)}(X_\perp) + \frac{(Qz_b^*)^2}{8X_\perp^2} + \cdots\right] \quad (16)$$

$$\to \frac{e^{\frac{i}{2}f_0P_a^-}r_0^2}{(2\pi)^3 i}\frac{\pi\Gamma(1-\frac{i}{2}P_a^-Q)}{\Gamma(\frac{i}{2}P_a^-Q)}\left\{\frac{4}{r_0^2(P_{\perp b}-P_{\perp a})^2}\right\}^{1-\frac{i}{2}P_a^-Q} \quad (\alpha' \to 0,\ \ z_b = 0) \quad (17)$$

のようになる. (16) 式右辺の第三項は z_b の与え方により遷移振幅に大きく寄与する. また, 終状態の相対自由度を基底状態 $(z_b = 0)$ とし, zero slope 極限 $(\alpha' \to 0)$ をとると, 't Hooft の求めた結果と一致する [2]. S 行列のユニタリ性は補助条件の扱いに関わるが, これを仮定して光学定理を用いると, 基底状態にある粒子の全断面積は

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}(a) = \frac{2}{\mathrm{Flux}}\mathrm{Im}\int\frac{d^2X_\perp}{(2\pi)^3 i} \times\left[e^{\frac{i}{2}P^-f_0}\langle 0|e^{-\frac{i}{2}P^-Q\log\left(\frac{r_1r_2}{r_0^2}\right)}|0\rangle - 1\right] \quad (18)$$

と求まる. ここで $r_i = \sqrt{(X_\perp + (-)^{i-1}\frac{1}{2}\bar{x}_\perp)^2}$ である.

6. まとめと今後の課題

曲がった時空の下での bi-local 場模型を定式化した. これを用いて衝撃波型背景時空での bi-local 場の振る舞いを調べ, いくつかの物理的状態の遷移振幅, 全断面積を求めた. 得られた遷移振幅は zero slope 極限の下で, 't Hooft が求めた結果と一致することが分かった. また終状態として相対自由度のコヒーレント状態を選ぶと, 遷移振幅の中に非常に大きく寄与する部分が現れ, 今後の加速器実験において, 衝撃波型背景時空の効果を観測できる可能性が示唆できた. 今後は物理的条件の扱いや, tri-local 場等での散乱についても調べていきたい.

7. 参考文献

[1] P. C. Aicheluburg and R. U. Sexl, Gen. Rel. Grav. **2** (1971) 303.

[2] G. 't Hooft, Phys. Lett. B **198** (1987) 61.
H. Nastase, arXiv: hep-th/0410124v2 26 Oct 2004.

[3] D. Amati and C. Klimcik, Phys. Lett. B 210 (1988), 92.
A. Jevicki, K. Jin and Q. Ye, arXiv: 1106.3983v3 [hep-th] 29 Sep 2011.

[4] D. Berenstein, J. Maldacena and H. Nastase, arXiv:hep-th/02020213v3 26 Feb 2002.

[5] T. Goto, S. Naka and K. Kamimura, Prog. Theor. Phys. **67**, (1979) 69.