

## ブラックホールへの相対論的崩壊の球対称流体計算

Spherical Hydrodynamics Calculation of General Relativistic Collapse to Black Holes

○久保 亮太<sup>1</sup>, 岩本 弘一<sup>2</sup>  
\*Ryota Kubo<sup>1</sup>, Koichi Iwamoto<sup>2</sup>

**Abstract:** We report a numerical code for spherical hydrodynamics in general relativity. The code can handle gravitational collapse to a black hole without the appearance of singularities. It is based on the formulation of Hernandez & Misner, in which retarded time is used as a time coordinate. This prevents the computational grid from penetrating inside the event horizon. We present the equations and a complete finite difference scheme for the adiabatic evolution of a fluid that obeys a  $\gamma$ -law equation of state. We summarize the results of several testbed calculations performed to check our code. We also compare our results for homogeneous dust collapse with the analytic Oppenheimer-Snyder solution.

## 1. Introduction

最終的にブラックホールを形成する星の重力崩壊では、重力場がとて強くなり、流体速度は光速に近づいていく。そのため、この崩壊を計算する際には、相対論的効果を取り入れる必要がある。本研究では、球対称な一般相対論的流体を記述する Misner & Sharp(MS) 方程式をもとに星の重力崩壊のテスト計算を行う [1].

ブラックホール形成を調べるために MS 方程式に現れる Schwarzschild time  $t$  の代わりに outgoing null coordinate  $u$  を採用した。この時間座標  $u$  を用いて MS 方程式を書き換えたものを Hernandez & Misner(HM) 方程式という。

本研究ではテスト計算として球対称なダスト球モデルで計算を行う。

## 2. Misner &amp; Sharp 方程式

球対称な計量を仮定し  $c = G = 1$  とおく単位系を使用する。

$$ds^2 = -e^{2\phi(t,A)} dt^2 + e^{\lambda(t,A)} dA^2 + R^2(t,A) d\Omega^2 \quad (1)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2)$$

$R$  は星の半径であり、共動系動径座標  $A$  は 0 から  $A_{total}$  までの値を取り、 $A_{total}$  は静止質量となるような半径である。完全流体におけるエネルギー運動量テンソルは以下の式となる。

$$T^{\alpha\beta} = [\rho_0(1+e) + P]u^\alpha u^\beta + P g^{\alpha\beta} \quad (3)$$

ここで、 $\rho_0$  は共動系での静止質量密度、 $e$  は単位質量あたりの内部エネルギー、 $P$  は圧力、 $u^\alpha$  は流体の 4 元速度である。

一般相対論においては、時空は質量と運動量によって曲がる。時空の曲がり具合はエネルギーと運動量の密度分布によって決まる。すなわち、アインシュタイン方程式が成

り立つ。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi T^{\mu\nu} \quad (4)$$

アインシュタイン方程式とエネルギー運動量の保存則

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (5)$$

より、以下の関係式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -e^\phi \left( \frac{4\pi\Gamma R^2}{w} \frac{\partial P}{\partial A} + \frac{m + 4\pi R^3 P}{R^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -e^\phi 4\pi R^2 P U \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial A} = -\frac{1}{\rho_0 w} \frac{\partial P}{\partial A} \quad (8)$$

$$\Gamma = (1 + U^2 - 2m/R)^{1/2} \quad (9)$$

$$\rho_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R^2 (\partial R / \partial A)} \quad (10)$$

エンタルピー  $w$ 、 $A$  内の重力質量  $m$ 、動径計量  $\Gamma$ 、座標速度  $U$  は各々以下のように定義されている。

$$w = 1 + e + P/\rho_0 \quad (11)$$

$$m = 4\pi \int_0^A \rho_0(1+e)R^2(\partial R/\partial A)dA \quad (12)$$

$$U = e^{-\phi} \frac{\partial R}{\partial t} \quad (13)$$

$$\Gamma = e^{-\lambda/2} \frac{\partial R}{\partial A} \quad (14)$$

(12) 式を微分し (10) 式を代入すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial m}{\partial A} = (1+e)\Gamma \quad (15)$$

同様に (9) 式に (10) 式を代入すると以下の式が得られる。

$$e^{-\lambda/2} = 4\pi\rho_0 R^2 \quad (16)$$

これらの方程式は熱力学第一法則

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -P \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (17)$$

<sup>1</sup> 日大理工・院 (前)・物理 <sup>2</sup> 日大理工・教員・物理

を適応できなければならない。我々は (18) 式のような  $\gamma$ -law 状態方程式を扱う。

$$P = e\rho_0(\gamma - 1) \quad (18)$$

$\gamma$  は断熱指数である。

(6)(7)(8)(9)(10)(11)(13)(15)(17) 式を Misner & Sharp 方程式と呼ぶ。

星の中心  $A = 0$  と  $A = A_{\text{total}}$  における境界条件は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} A = 0 : R = 0, U = 0, \Gamma = 1, m = 0 \\ A = A_{\text{total}} : P = 0, e^\Psi = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

### 3. Hernandez & Misner 方程式

(1) 式から outgoing radial light rays は以下の式を満たす。

$$e^\phi dt = e^{\lambda/2} dA \quad (20)$$

この光線に沿って一定になるような時間座標  $u$  を以下の式で定義した。

$$e^\Psi du = e^\phi dt - e^{\lambda/2} dA \quad (21)$$

(1) の式の計量で使われている時間  $t$  の代わりに "observer time"  $u$  を導入した。  $e^\Psi$  は  $du$  を造るために導入された積分因子であり、ラプス関数と呼ばれる。(21) 式を使い計量を書き直す。

$$ds^2 = -e^{2\Psi} du^2 - 2e^\Psi e^{\lambda/2} dudr + R^2 d\Omega^2 \quad (22)$$

この時、座標速度  $U$  は以下のようなになる。

$$U = e^{-\Psi} \frac{\partial}{\partial u} R \quad (23)$$

ここで、音速  $v$  は、

$$v^2 = \frac{1}{\rho_0^2 w} \left[ P \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_{\rho_0} + \rho_0^2 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho_0} \right)_e \right] \quad (24)$$

MS 形式の時と同様に、応力エネルギーテンソルとアインシュタイン方程式とエネルギー運動量保存式から以下の関係式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} = & -\frac{e^\Psi}{1-v^2} \left( \frac{4\pi\Gamma R^2}{w} \frac{\partial P}{\partial A} + \frac{m+4\pi R^3 P}{R^2} \right) \\ & - \frac{e^\Psi v^2}{1-v^2} \left( 4\pi\rho_0 R^2 \frac{\partial U}{\partial A} + \frac{2U\Gamma}{R} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial m}{\partial u} = -e^\Psi 4\pi R^2 P U \quad (26)$$

$$\Gamma = (1 + U^2 - 2m/R)^{1/2} \quad (27)$$

$$\rho_0 = \frac{\Gamma + U}{4\pi R^2 (\partial R / \partial A)} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial A} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial A} + \frac{m}{4\pi\rho_0 R^4 \Gamma} + \frac{P}{\rho_0 \Gamma R} \quad (29)$$

$$\frac{\partial m}{\partial A} = (1 + e)\Gamma - \frac{PU}{\rho_0} \quad (30)$$

熱力学第一法則を適応させる。

$$\frac{\partial e}{\partial u} = -P \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (31)$$

(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31) 式を Hernandez & Misner 方程式と呼ぶ。

境界条件は以下のようなになる。

$$A = 0 : R = 0, U = 0, \Gamma = 1, m = 0$$

$$A = A_{\text{total}} : P = 0, e^\Psi = \Gamma + U \quad (32)$$

### 4. テスト計算

HM 方程式を差分化して数値的に解く。ここでメッシュ間隔は、はじめの星の中心から表面までの距離を等間隔に 20 分割した。物理量  $R, U, m, A, e^\Psi$  は格子点上で定義され、熱力学的物理量  $P, Q, \rho, w, v$  は格子点間の半分のところで定義し計算を行った。タイムステップは、クーラン条件とタイムステップあたり 2% 以下で変化する密度、0.5% 以下で変化する半径、10% 以下で変化する量  $1 - 2m/R$  の 4 つの基準で制限した。クーラン条件は音速の大きさが格子速度より小さい条件から導出することが出来る。

本研究で使用したモデルは、0.797 太陽質量の密度  $3.98 \times 10^{15} \text{g/cm}^3$  で一様な星である。更に、圧力のないダスト球として扱う。数値結果を以下で記す。

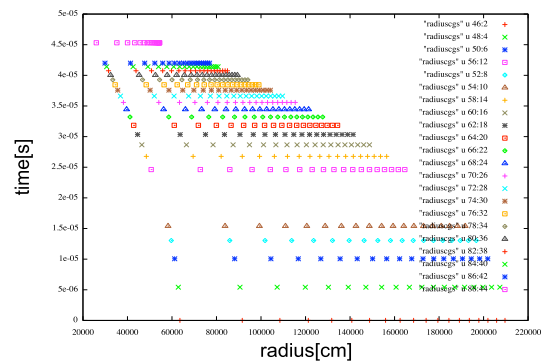


Figure 1. time[s] vs radius[cm]

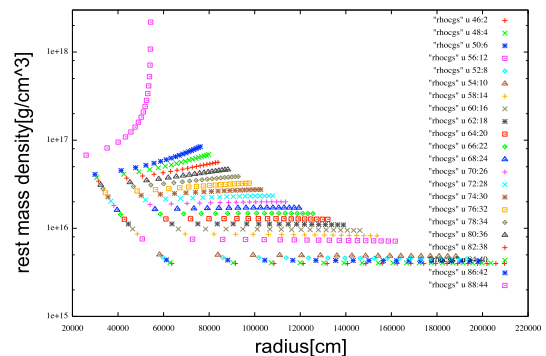


Figure 2 rest mass density[ $\text{g/cm}^3$ ] vs radius[cm]

### 6. 参考文献

[1] T. W. Baumgarte & S. L. Shapiro, *Astrophysical Journal*, 443, 717, 1995