O-2

higher spin gravity と bi-local 場 の関係

Relation between higher spin gravity and bi-local fields

○佐竹良平[1]　仲滋文[2]

*Ryohei Satake[1],Shigefumi Naka[2]

Abstract: The higher-spin gravity is an AdS dual higher-spin gauge theory including gravity, which is conjectured by Polyakov based on $O(N)$ vector models. Recently, another aspect of this theory shows increasing interest in the bi-local fields as large-N corrective fields out of $O(N)$ vector model. Historically, the bi-local fields theory was proposed by Yukawa as a prototype of non-local fields. In this work, we study the relation between the AdS dual bi-local corrective field theories out of higher-spin gravity and Yukawa's non-local field theories.

1．はじめに

higher-spin gravity の考え方は、Polyakov により提案された AdS 時空と背景重力を結び付ける興味ある考え方の一つである。これは、$O(N)$ 場 ϕ^i の保存流 $J_{(\mu_1\cdots\mu_s)}, (s=0,1,\cdots)$ を生成する母関数の期待値を

$$\left\langle \exp\int d^3x h_0^{(\mu_1\cdots\mu_s)} J_{(\mu_1\cdots\mu_s)}\right\rangle_\phi = \mathrm{e}^{S[h_0]} \qquad (1)$$

とおいて源場 $h_0^{(\mu_1\cdots\mu_s)}$ の有効作用を定義すると、S が AdS 時空の重力理論を含むことを予想したもので、素粒子の基本理論と関係して多くの議論がなされた。一方、これと少し異なる観点から、近年では higher-spin gravity と bi-local 場の関係が多く議論されている。

bi-local 場は 1948 年に湯川により提案された非局所場の原形であり、この bi-local 場と高階スピン場との関係を調べていくことは非局所場と AdS との関連を調べる上でも興味深い。本研究では、$O(N)$ ベクトルモデルから bi-local 場との関連性を確認し、higher-spin gravity と bi-local モデルとの対応関係を調べていく。

2．$O(N)$ ベクトルモデルとその保存流

高階スピン場とそれに結び付いた bi-local 場を考える上で, 以下の O(N) ベクトルモデルから議論を組み立てるのが便利である。$O(N)$ ベクトルモデルは N 個のスカラー場 $\phi^i, (i=1,2,\cdots,N)$ を力学変数とする場のモデルで, 一般的には, その作用は

$$S = \int d^dx\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^i)(\partial^\mu\phi^i) + V(\phi)\right\} \qquad (2)$$

のような形である。ここではポテンシャル ϕ^2 のみ関数で、作用は添字 i の $O(N)$ 変換の下で不変でである。この $O(N)$ 場から高階スピン場につながる保存流を構成する際には, 通常 $V=0$ の自由場で考える。そのような場の運動方程式が $\partial^\mu\partial_\mu\phi^i=0$ であることに注意すると $O(N)$ 不変な保存流の形は $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ として

$$J_\mu = \phi\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi \qquad (3)$$

$$J_{\mu\nu} = \phi(\overrightarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + \overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu)\phi - \eta_{\mu\nu}\phi(\overrightarrow{\partial}^2 + \overleftarrow{\partial}\overrightarrow{\partial})\phi \qquad (4)$$

等々となる。この様な保存流を生成する母関数を

$$O(x,\epsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{N}\epsilon^{\mu_1}\cdots\epsilon^{\mu_n}J_{\mu_1}\cdots J_{\mu_n} = \phi(x)K(\epsilon,\partial)\phi(x) \qquad (5)$$

と表すと、K の一般形は

$$K(\epsilon,\partial) = F[\epsilon\cdot\overleftrightarrow{\partial}, \epsilon^\mu G_{\mu\nu}\epsilon^\nu] \qquad (6)$$

$$\left(\tilde{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu,\ G_{\mu\nu} = \tilde{\partial}_\mu\tilde{\partial}_\nu - g_{\mu\nu}(\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial})\right)$$

となる。ここで F は考えている保存流を生成する対称性から決まり、S 階の保存流は

$$J_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s} = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\begin{pmatrix} s-\frac{1}{2} \\ k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-\frac{1}{2} \\ s-k\end{pmatrix} \times\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_k}\phi\partial_{\mu_{k+1}}\cdots\partial_{\mu_s}\phi - \mathrm{traces} \qquad (7)$$

の形になる。この形から保存流が高階スピン場 $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_k}\phi$, $(k=0,1,2,\cdots,s)$ の双１次形式で与えられることが分かる。

3．高階スピン場の集団変数としての bi-local 場

§.2 で議論した高階スピン場と保存流を bi-local 場に結び付ける方法は、色々な観点から議論されている。例えば Jevicki et.al. は、母関数 (5) がすでに (x,ϵ) の２点に依存する場であることに注意し、$\epsilon^2=0$ の条件を外したものを $\Phi(x,y)$ と置いて一般的な bi-local 場と考えた。この場

[1]日大理工・院（前）・物理
[2]日大理工・教員・物理

合 ϕ^i の集団場としての $\Phi(x,y)$ が bi-local 場として適切な場の方程式を満たすか、またそのような場の方程式を満たす作用はどのようになっているかを調べる必要がある。

一般的に、曲がった時空の高階スピン場 $h_{\mu_1\cdots\mu_s}$ は、以下の方程式を満たすことが知られている。

$$\nabla_\rho\nabla^\rho h_{\mu_1\cdots\mu_s} - s\nabla_\rho\nabla_{\mu_1}h^\rho{}_{\mu_2\cdots\mu_s} + \frac{1}{2}\nabla_{\mu_1}\nabla^{\mu_2}h^\rho{}_{\rho\mu_3\cdots\mu_s} + 2(s-1)(s+d-2)h_{\mu_1\cdots\mu_s} = 0 \tag{8}$$

ここで s と d は場のスピンと空間の次元をそれぞれ表し、また ∇ は共変微分である。次に背景時空の半径 $-l^2$ の AdS_{d+2} を用いて、更に共変ゲージ

$$\nabla^\rho h_{\rho\mu_2\cdots\mu_s} = 0, \quad g^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma\mu_3\cdots\mu_s} = 0 \tag{9}$$

をとると、高階スピン場の方程式は

$$(\Box + m^2)h_{\mu_1\cdots\mu_s} = 0 \tag{10}$$

ただし $m^2 = s^2 + (d+5)s - 2(d-2)$ となる。

Jevicki-Jin はこの高階スピン場を $k_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(x^\alpha) = e^{\mu_1}_{\alpha_1}(x)\cdots e^{\mu_s}_{\alpha_s}(x)h_{\mu_1\cdots\mu_s}(x^\mu)$、($e^\mu_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}$) により AdS 空間 ($X^2 = -l^2$) に写像し、bi-local 場 $\Phi(x,y)$ に対応するものとして

$$K(x^\alpha, y^\alpha) \equiv \sum_s k_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(x^\alpha)y^{\alpha_1}\cdots y^{\alpha_s} \tag{11}$$

と置いた。$K(x^\alpha, y^\alpha)$ の満たす方程式として、(8) と (9) の第 2 式から以下の (12) 式が、また (9) の第 1 式から以下の (13) 式が導かれる。

$$\partial_x^2 K(x,y) = 0, \quad \partial_y^2 K(x,y) = 0, \tag{12}$$

$$\partial_x \cdot \partial_y K(x,y) = 0 \tag{13}$$

ここで、2 点 (x,y) の重心変数 $X = \frac{1}{2}(x+y)$ と相対変数 $\bar{x} = x - y$ を定義すると、(12),(13) は、$\frac{\partial^2}{\partial X^2}K = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}}K = \frac{\partial}{\partial X}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{x}}K = 0$ となり、$\bar{p} = -i\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$, $P = -i\frac{\partial}{\partial X}$ とおくと湯川の bi-local 場の方程式

$$(P^2 + m^2)\Phi = 0 \tag{14}$$

$$(\bar{p}^2 + \lambda^2)\Phi = 0 \tag{15}$$

$$P\cdot\bar{p} = 0 \tag{16}$$

で $m = \lambda = 0$ と置いた場合に対応している。

より直接的に、$O(N)$ ベクトルモデルの作用を基に集団変数としての bi-local モデルの作用を導く試みは R.Das によりなされ、(2) の作用で $V = \frac{1}{2}m^2\phi^i\phi^i - \frac{1}{2N}\lambda(\phi^i\phi^i)^2$ と置いた形から、

$$\int \mathcal{D}^N\phi e^{-S_N[\phi]} = \int \mathcal{D}\Psi \left|\frac{\delta\phi}{\delta\Psi}\right| e^{-S_N[\Psi]} = \int \mathcal{D}\Psi e^{-S_{eff}[\Psi]} \tag{17}$$

の意味で、S_N で記述される系が bi-local 場 Ψ で記述される系に書き換えられることが示された。さらに、S_N と S_{eff} の双方作用で計算した場の相関関数が、$N \to \infty$ の極限で一致することも示された。

４．bi-local 場と infinite slope limit

現在の bi-local 理論では、bi-local 場の基礎方程式は (14) に粒子間の相互作用を取り入れて

$$(P^2 + \frac{1}{\alpha'}a^\dagger_\mu a^\mu + m^2)|\Psi\rangle = 0 \tag{18}$$

$$P_\mu a^\mu|\Psi\rangle = 0 \tag{19}$$

とする。$(a, a^\dagger)$ は $(\bar{p}, \bar{x})$ を基にした生成消滅演算子である。この時スピン s の状態は $|0\rangle$ を基底状態として $|\Psi_s\rangle = a^\dagger_{i_1}\ldots a^\dagger_{i_s}|0\rangle - \mathrm{trace}$ となり、それぞれの質量は以下の図.1 の様になっている。そこで基底状態の質量を固定し $\alpha' \to \infty$ の極限をとると、図.2 のように質量の縮退した高階スピン場の状態が得られ、これが高階スピン場 $h_{\mu_1\cdots\mu_s}$ に対応する。

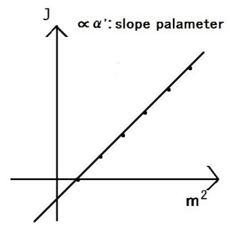

図.1

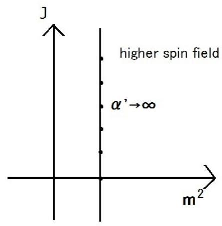

図.2

５．まとめと今後の課題

本研究では、$O(N)$ ベクトルモデルの保存流を基に ϕ^i の集団場が bi-local 場の性格を持つこと、またこの様な bi-local 場の作用は $O(N)$ ベクトルモデルから直接導かれることも確認した。厳密には、集団場は質量が 0 に縮退した高階スピン場の集団変数として構成される。これは bi-local 場の infinite slope limit としても表現出来るが、この様な極限が実際に higher-spin gravity と関係があるかを調べることが今後の興味ある課題である。

６．参考文献

[1]I.R.Klebanov and A.M.Polyakov,Phys.lett.B 550, 213(2002)

[2]M.A.Vasiliev,Int.J.Mod.Phys. D 5, 763 (1996)

[3]A.Jevicki,et.al.(2011;the 35th Johns Hopkins workshop)

[4]C.Fronsdal, Phys.Rev. D 20, 848(1979)

[5]H.Yukawa, Phys.Rev. 76 (1949) ,(L)300-301

[6]S.R.Das and A.Jevicki, Phys.Rev.D 68, 044011 (2003)