O-28

SU(2) ゲージ対称性をもつ有質量粒子のツイスター模型
A twistorial model of massive particles with a SU(2) gauge symmetry

○岡野諭 [1]，出口真一 [2]
*Satoshi Okano[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We study a massive spinning particle model with a non-linearly realized SU(2) gauge symmetry. This model is constructed from twistor variables and can be written in terms of the space-time and spinor variables. Carrying out the canonical quantization of this model, we derive the equations of motion for higher-spin fields. Furthermore, we investigate the physical meaning of the SU(2) symmetry in the model.

1．導入

これまでにスピンをもつ粒子を記述する種々の古典力学的な模型が提案されてきた．本研究ではツイスター理論を背景に，スピン自由度をもつ有質量粒子を記述する模型を考察する．

ツイスター理論は 1967 年に Penrose によって提案された無質量系の記述の際に有効な理論である．ツイスター理論に基づき，時空変数とスピナー変数を用いたスピンをもつ無質量粒子の模型が過去に与えられている [1]．本研究ではこの模型を有質量粒子の場合に拡張する．

ツイスター理論において有質量粒子を記述する際には N ($N \geq 2$) 種類のツイスター変数が必要であり，同時に SU(N) 対称性が自動的に導入される．Penrose らはこの対称性を素粒子の内部対称性に同一視できると予想した（SU(2) →弱アイソスピン）[2]．しかし，現在まで彼らの予想に関する力学的考察は行われていない．また，有質量粒子のツイスター模型として Fedoruk や Townsend らによる模型が知られているが，そこでは根拠が不明瞭な拘束条件が付加されている [3]．本研究では，ゲージ原理に基づき模型を構築し，拘束条件を系統的に導くと共に Penrose らの予想に関する考察を行う．

我々は，2 種類のツイスター変数を導入し U(1) × SU(2) ゲージ対称性をもつ有質量粒子の模型を与える．線形に SU(2) 対称性を実現する模型はスピン 0 の粒子のみを記述する．そこで，スピンに関する制限を緩和するため SU(2) ゲージ対称性の非線形実現を用いて模型を修正する．このとき，ツイスター変数の代わりに時空変数とスピナー変数を力学変数に選び，正準形式を構成し量子化を行う．その結果として導かれる連立方程式とその解を吟味し，高階スピンをもつ有質量場の方程式を導く．さらに，SU(2) 対称性の物理的意味を考察する．

2．U(1) × SU(2) ゲージ対称性をもつ有質量粒子

ツイスター変数 $Z_i^A(\tau)$ ($A = 1,2,3,4;\, i = 1,2$) は世界線のパラメータ τ の関数として，2 成分スピナー変数 $\omega_i^{\alpha}(\tau)$ ($\alpha = 0,1$) と $\pi_{i\dot{\alpha}}(\tau)$ ($\dot{\alpha} = \dot{0},\dot{1}$) の組により $Z_i^A := (\omega_i^{\alpha},\, \pi_{i\dot{\alpha}})$ と定義される．ツイスター変数 Z_i^A と 2 成分スピナー変数 $\pi_{i\dot{\alpha}}$ 及びそれらの複素共役 $\bar{Z}_A^i$, $\bar{\pi}_{\alpha}^i$ を用いて，スピンをもたない有質量粒子の作用は次式で与えられる：

$$
\begin{aligned}
S_0 = \int d\tau \Big[& i\bar{Z}_A^i \dot{Z}_i^A + a\left(\bar{Z}_A^i Z_i^A - 2s\right) + \bar{Z}_A^i b_i{}^j Z_j^A \\
& + \frac{f}{2}\left(\bar{\pi}^{i\alpha}\pi_i^{\dot{\alpha}}\bar{\pi}_{\alpha}^j\pi_{j\dot{\alpha}} - m^2\right) \Big] \; . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで $a(\tau)$ は U(1) ゲージ場であり，$b(\tau) := b^r(\tau)\sigma_r$ ($r = 1,2,3$) は SU(2) ゲージ場（σ_r はパウリ行列）である．また，$f(\tau)$ は補助変数，m は質量パラメータ，s は実定数である．作用 S_0 は $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$ 変換 $Z_i^A \to Z_i'^A = \mathrm{e}^{i\theta(\tau)} U_i{}^j(\tau) Z_j^A$, $a \to a' = a + \dot{\theta}$, $b \to b' = UbU^{\dagger} - i\dot{U}U^{\dagger}$ ($\mathrm{e}^{i\theta(\tau)} \in \mathrm{U}(1); U \in \mathrm{SU}(2)$) のもとで不変である．解析の結果，作用 S_0 はスピン 0 の粒子のみを記述することがわかっている．

スピンに関する制限を緩和する為，ゲージ対称性の非線形実現を用いて作用 S_0 を修正する．いま，SU(2) の部分群 $\mathrm{U}(1)_{\mathsf{b}}$（添字 b を用いて U(1) と区別する）を基に，商空間 $\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)_{\mathsf{b}}$ とその代表元 $V(\xi,\bar{\xi})$ を考え，新たな変数を定義する：$\mathsf{Z}_i^A := V^{\dagger}{}_i{}^j Z_j^A$ ($\lambda_i^{\dot{\alpha}} := V^{\dagger}{}_i{}^j \pi_{j\dot{\alpha}}$), $\mathsf{b} := V^{\dagger}bV - i\dot{V}^{\dagger}V$. このとき，SU(2) 変換のもとで Z_i^A と b の第 3 成分は次のように変換する：$\mathsf{Z}_i^A \to \mathsf{Z}'^A_i = \Theta_i{}^j \mathsf{Z}_i^A$, $\mathsf{b}^3 \to \mathsf{b}'^3 = \mathsf{b}^3 + \dot{\vartheta}$. 同時に，$(\mathsf{b}^1, \mathsf{b}^2)$ は角 ϑ だけ回転する．ここで $\Theta := \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\sigma_3} \in \mathrm{U}(1)_{\mathsf{b}}$ である．これらの変換則を踏まえ，SU(2) 不変な 2 つの項 $S_{12} := k\int d\tau \sqrt{\mathsf{b}^{\hat{i}}\mathsf{b}^{\hat{i}}}$ ($\hat{i} = 1,2$) と $S_3 := -2t\int d\tau \mathsf{b}^3$（ここで k, t は実定数）を S_0 に加えることで模型を修正する：

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + S_{12} + S_3 \\
&= \int d\tau \Big[i\bar{\mathsf{Z}}_A^i \dot{\mathsf{Z}}_i^A + a\left(\bar{\mathsf{Z}}_A^i \mathsf{Z}_i^A - 2s\right) + \mathsf{b}^3\left(\bar{\mathsf{Z}}_A^i \sigma_{3i}{}^j \mathsf{Z}_j^A - 2t\right) \\
&\qquad + \mathsf{b}^{\hat{i}}\bar{\mathsf{Z}}_A^i \sigma_{\hat{i}i}{}^j \mathsf{Z}_j^A + k\sqrt{\mathsf{b}^{\hat{i}}\mathsf{b}^{\hat{i}}} + \frac{f}{2}\left(\bar{\lambda}^{i\alpha}\lambda_i^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\alpha}^j\lambda_{j\dot{\alpha}} - m^2\right) \Big]. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式 (2) は Poincaré 対称性，パラメータの付け替え $\tau \to \tau'(\tau)$ のもとでの対称性，U(1) × SU(2) ゲージ対称性をもつ．以下，ツイスター変数を $\mathsf{Z}_i^A = (ix^{\alpha\dot{\alpha}}\lambda_{i\dot{\alpha}} + \psi_i^{\alpha},\, \lambda_{i\dot{\alpha}})$ と分解し，Z_i^A の代わりに力学変数を時空変数 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ とスピナー変数 $\lambda_{i\dot{\alpha}}$, ψ_i^{α} に選び，この作用を基にした正準形式を論じる．

[1] 日大理工・院・量子　 [2] 日大・量科研

3．Dirac の手法による正準形式と正準量子化

式 (2) に含まれる正準座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}^i_\alpha, \lambda_{i\dot{\alpha}}, \psi^\alpha_i, \bar{\psi}^{i\dot{\alpha}}, \mathsf{b}^{\hat{\imath}}, \mathsf{b}^3, f, a)$ に対する正準運動量を $(P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, P_{(\bar{\lambda})}{}^\alpha_i, P^{i\dot{\alpha}}_{(\lambda)}, P_{(\psi)}{}^i_\alpha, P_{(\bar{\psi})i\dot{\alpha}}, P^{\hat{\imath}}_{(\mathsf{b}12)}, P_{(\mathsf{b}3)}, P_{(f)}, P_{(a)})$ と表す．式 (2) より得られる全ての拘束条件を第 1 類と第 2 類に分類する．分類の後，第 2 類拘束条件は Dirac 括弧を定義する際に用い，その結果基本的な Dirac 括弧は次のように得られる：

$$
\begin{aligned}
&\left\{x^{\alpha\dot{\alpha}},\, P^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\right\}_{\mathrm{D}} = \delta^\alpha_\beta \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,, &&\left\{f,\, P_{(f)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\\
&\left\{\bar{\lambda}^i_\alpha,\, \psi^\beta_j\right\}_{\mathrm{D}} = i\,\delta^i_j \delta^\beta_\alpha\,, &&\left\{a,\, P_{(a)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\\
&\left\{\lambda_{i\dot{\alpha}},\, \bar{\psi}^{j\dot{\beta}}\right\}_{\mathrm{D}} = -\,i\,\delta^j_i \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,, &&\left\{\mathsf{b}^3,\, P_{(\mathsf{b}3)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

構成した正準形式を基に量子化を行う．Dirac の手法に従い，正準変数を演算子に置き換え，Dirac 括弧 (3) を正準交換関係に置き換える．また，量子化の後，上で得られた第 1 類拘束条件は物理的状態 $|\Phi\rangle$ を定める条件 (第 1 類拘束条件) $|\Phi\rangle = 0$ と解釈する．これらの条件は波動関数 $\Phi = \Phi(x, \lambda, \bar{\lambda})$ が満たす次の連立方程式になる：

$$
\left(\bar{\lambda}^{i\alpha} \lambda^{\dot{\alpha}}_i \bar{\lambda}^k_\alpha \lambda_{k\dot{\alpha}} - m^2\right) \Phi = 0\,, \tag{4}
$$

$$
\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} + \bar{\lambda}^i_\alpha \lambda_{i\dot{\alpha}}\right) \Phi = 0\,, \tag{5}
$$

$$
\left(\bar{\lambda}^i_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}^i_\alpha} - \lambda_{i\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \lambda_{i\dot{\alpha}}} - \frac{2s}{\hbar}\right) \Phi = 0\,. \tag{6}
$$

$$
(S_3 - t)\,\Phi = 0\,, \qquad \left(S_{\hat{\imath}} S_{\hat{\imath}} - k^2\right) \Phi = 0\,. \tag{7}
$$

ここで $S_r := \frac{1}{2} \sigma_r{}_i{}^j \left(\bar{\lambda}^i_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}^j_\alpha} - \lambda_{j\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \lambda_{i\dot{\alpha}}}\right)$ $(r = 1, 2, 3)$ であり，これは SU(2) 代数を満たす．式 (4) は質量殻条件である．波動関数 Φ に対し Lorentz 共変性と SU(2) 共変性を課すと，式 (5)–(7) の解として，次のような平面波解が得られる：

$$
\Phi^{i_1 \cdots i_m}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m; j_1 \cdots j_n, \dot{\alpha}_1 \cdots \dot{\alpha}_n} = \prod_{k=0}^{m} \bar{\lambda}^{i_k}_{\alpha_k} \prod_{l=0}^{n} \lambda_{j_l \dot{\alpha}_l} \mathrm{e}^{\frac{-i}{\hbar} x^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^i_\alpha \lambda_{i\dot{\alpha}}}\,. \tag{8}
$$

同時に s の値は式 (6) から $s = \frac{\hbar}{2}(m - n)$ と定まり，t の値は式 (7) の第 1 式から $t = \frac{\hbar}{2}\{(m_1 - m_2) - (n_1 - n_2)\}$ と定まる．ここで (m_1, m_2, n_1, n_2) は式 (8) における $(\bar{\lambda}^1_\alpha, \bar{\lambda}^2_\alpha, \lambda_{1\dot{\alpha}}, \lambda_{2\dot{\alpha}})$ の冪を表す数である．このように s と t は $\hbar/2$ を基本単位として量子化される．また，S_r が満たすリー代数から，t の取り得る値の上限と下限は $t/\hbar = -J, -J+1, \cdots, J-1, J$ のように与えられる．ここで J は 0 以上の整数または半整数であり，$S_r S_r$ の固有値は $\hbar^2 J(J+1)$ である．このとき k は，J と t の値を用いて $k = \pm\sqrt{\hbar^2 J(J+1) - t^2}$ と量子化される．

量子数 J の物理的意味を考察する．一般に，自由粒子がもつスピンの大きさ演算子は Pauli-Lubanski ベクトル W^μ を用いて $-W^2/m^2$ と与えられる．ここで $W^\mu := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma$ であり，$M_{\mu\nu}$ は Lorentz 変換，P_μ は並進変換の生成子である．一方，この模型における具体的な $-W^2/m^2$ の表式は $-W^2/m^2 = S_r S_r$ となる．したがって $S_r S_r$ の固有値 $\hbar^2 J(J+1)$ は粒子がもつスピンの大きさを与える．

4．高階スピン場の方程式と SU(2) 対称性

式 (8) を式 (5) に代入し，式 (4) より得られる公式 $\bar{\lambda}^{i\alpha} \bar{\lambda}^j_\alpha = -m\epsilon^{ij}/\sqrt{2}$ を用いることで次式を得る：

$$
i\hbar\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1 \dot{\beta}}} \Phi^{i_1 \dots}_{\alpha_1 \dots; j_1 \dots \dot{\alpha}_1 \dots} = m\epsilon^{i_1 k} \Phi^{i_2 \dots \quad\ \dot{\beta}}_{\alpha_2 \dots; k j_1 \dots \dot{\alpha}_1 \dots}\,, \tag{9}
$$

$$
i\hbar\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{\beta \dot{\alpha}_1}} \Phi^{i_1 \dots}_{\alpha_1 \dots; j_1 \dots \dot{\alpha}_1 \dots} = m\epsilon_{j_1 k} \Phi^{k i_1 \dots}_{\beta \alpha_1 \dots; j_2 \dots \dot{\alpha}_2 \dots}\,. \tag{10}
$$

式 (9) と (10) はスピン J をもつ有質量場の方程式である．

いま，SU(2) 対称性の物理的意味を考察する為，$J = 1/2$ の場合を考える．このとき式 (9) と式 (10) は

$$
i\hbar\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\dot{\alpha}}} \Phi^i_\alpha = m\epsilon^{ij} \Phi^{\dot{\alpha}}_j, \quad i\hbar\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\dot{\alpha}}} \epsilon^{ij} \Phi^{\dot{\alpha}}_j = m\Phi^i_\alpha \tag{11}
$$

となる．上式は添字 $i\,(i = 1, 2)$ があることを除いて，Dirac 方程式の 2 成分表示そのものである．式 (11) で $i = 1$ と選んだものは粒子が従う Dirac 方程式であり，$i = 2$ と選んだものは反粒子が従う Dirac 方程式である（次の表を参照）．

	粒子：$t = \hbar/2$	反粒子：$t = -\hbar/2$
右手型：$s = \hbar/2$	$\Phi^{\dot{\alpha}}_2$	$\Phi^{\dot{\alpha}}_1$
左手型：$s = -\hbar/2$	Φ^1_α	Φ^2_α

この表からわかるように，Φ がもつカイラリティ（右手型・左手型）は s の値によって区別され，電荷（粒子・反粒子）は t の値によって区別される．したがって，異なる量子数 t に属する成分同士を混ぜる SU(2) 変換は粒子と反粒子の状態を混ぜ合わせる変換であることがわかる．このことから，この模型がもつ SU(2) 対称性は粒子・反粒子間の内部対称性であることが結論づけられる．この結果は Penrose らの予想に対して否定的である．

6．まとめと今後の課題

本研究では，ゲージ原理に基づきスピンをもつ有質量粒子の作用を与え，正準形式を構成し量子化を行った．導かれた連立方程式 (4)–(7) を解くことにより，整数または半整数スピン J をもつ有質量自由粒子の平面波解を得た．その結果を基に高階スピンをもつ有質量場の方程式（式 (9) と式 (10)）を導いた．さらに，スピンが $J = 1/2$ の場合を例に SU(2) 対称性の物理的意味を考察し，SU(2) 対称性は粒子・反粒子間の内部対称性であることを示した．今回は $J = 1/2$ の場合に限定したが，より高いスピンの場合にも同様の議論を行うことができる．

この模型を基に高階スピンをもつ場同士の相互作用を考えることは興味深いが，当面の課題は，この模型に外場（ゲージ場，重力場）との相互作用を取り入れることである．

参考文献

[1] S. Deguchi, S. Negishi, S. Okano, T.Suzuki, Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450044.

[2] R. Penrose, Rep. Math. Phys. **12**, 65 (1977).

[3] S. Fedoruk, J. Lukierski, Phys. Lett. B **733** (2014) 309-315; L. Mezincescu, A. J. Routh, P. K. Townsend, Ann. Phys. **346** (2014) 66-90.