O-3

減衰する調和振動子の量子化
A canonical quantization of the damped harmonic oscillator

○園田真司[1]，中野邦彦[2]，出口真一[3]
*Shinji Sonoda[1], Kunihiko Nakano[2], Shinichi Deguchi[3]

Abstract: We perform a canonical quantization of the damped harmonic oscillator in such a way that the positive definiteness of real parts of energy eigenvalues and the positive definiteness of squared norm of state vectors are ensured.

1．導入

空気抵抗を受けて減衰する調和振動子は，力学の授業で学ぶよく知られた問題のひとつである．空気抵抗が速度に比例するような調和振動子の運動方程式は次式で与えられる：

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0,\quad m,k,\gamma>0. \tag{1}$$

ここで，m は質点の質量，$x=x(t)$ はばねの変位，k はばね定数，γ は空気抵抗を表す減衰係数である．この方程式の解は，定数 m,k,γ の大小関係により，減衰振動解，臨界減衰解，過減衰解の 3 つの可能性があるが，ここでは減衰振動解に注目する．実際に，減衰振動を表す一般解は次のように求まる：

$$x(t)=e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(C_1e^{-i\omega t}-C_2^*e^{i\omega t}). \tag{2}$$

ただし，ω は $\omega:=\frac{\gamma}{2m}\sqrt{\frac{4mk}{\gamma^2}-1}$ で定義される定数，C_1 と C_2 は複素数の未定乗数であるが，$x(t)$ が実数であることから $C_1=-C_2$ という条件が課される．

本研究では，このような減衰する調和振動子の量子化を試みる．量子化を行うためにはラグランジアンが必要になるが，素朴なラグランジアンはあらわな時間依存性を持つため，量子化の議論には不向きである．そこで本研究では，x に加え，仮想的な自由度 y を含むあらわな時間依存性を持たないラグランジアンを採用する．それから得られるハミルトニアンは不定値であり，力学系の安定性が問題になるが，適切な量子化条件を設定することで，エネルギー固有値の実部の正定値性と状態ベクトルの 2 乗ノルムの正定値性が保障される．このような量子化が正しいことを確認するために，本研究では Heisenberg 方程式の解を求め，その解のコヒーレント状態における期待値を評価して古典解 (2) と比較する．

2．減衰する調和振動子の解析力学

1931 年，Bateman は式 (1) を導くあらわに時間に依存しない次のようなラグランジアンを与えた [1]：

$$L=m\dot{x}\dot{y}+\frac{\gamma}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)-kxy. \tag{3}$$

ここで，y は仮想的な力学変数である．式 (3) を y に関する Eular-Lagrange 方程式に代入すると，式 (1) を得る．一方，x に関する Eular-Lagrange 方程式に代入すると，$m\ddot{y}-\gamma\dot{y}+ky=0$ が得られるが，これは振幅が増加する調和振動子を表す．また，パリティ変換 $\mathcal{P}$ を $x\to y, y\to x$，時間反転 $\mathcal{T}$ を $t\to -t$ と定義すると，L は $\mathcal{PT}$ 変換のもとで不変である．

次に，新しい力学変数 $x_1:=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $x_2:=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ を定義し，これを用いて式 (3) を書きなおすと次式を得る：

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2)-\frac{\gamma}{2}(x_1\dot{x}_2-\dot{x}_1x_2)-\frac{k}{2}(x_1^2-x_2^2). \tag{4}$$

式 (4) から，共役運動量 p_1,p_2 は

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1+\frac{\gamma}{2}x_2,\quad p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=-m\dot{x}_2-\frac{\gamma}{2}x_1 \tag{5}$$

と求まり，さらにハミルトニアンが次のように得られる：

$$H=\left(\frac{p_1^2}{2m}+\frac{k'x_1^2}{2}\right)-\left(\frac{p_2^2}{2m}+\frac{k'x_2^2}{2}\right)-\frac{\gamma}{2m}(p_2x_1+p_1x_2). \tag{6}$$

ただし，k' は $k':=k\left(1-\frac{\gamma^2}{4mk}\right)(>0)$ で定められる定数である．このハミルトニアンは不定値であることから，考えている古典力学系は不安定であることがわかる．

3．減衰する調和振動子の量子化

力学変数 x_1,p_1,x_2,p_2 を演算子 $\hat{x}_1,\hat{p}_1,\hat{x}_2,\hat{p}_2$ におきかえて，交換関係 $[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\mathbb{I}$ を設定し正準量子化を行う．このとき，式 (6) に対応するハミルトニアン演算子は

$$\hat{H}=\left(\frac{\hat{p}_1^2}{2m}+\frac{k'}{2}\hat{x}_1^2\right)-\left(\frac{\hat{p}_2^2}{2m}+\frac{k'}{2}\hat{x}_2^2\right)-\frac{\gamma}{2m}(\hat{p}_2\hat{x}_1+\hat{p}_1\hat{x}_2) \tag{7}$$

で与えられる．次に，消滅・生成演算子

$$a_i=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}_i+i\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}\hat{p}_i,\quad a_i^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}_i-i\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}\hat{p}_i \tag{8}$$

$(i=1,2)$ を導入する．これらがみたす交換関係は $[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij}\mathbb{I}$ である．消滅・生成演算子を用いると，ハミルトニアン演算子は次のように書ける：

$$\hat{H}=\hbar\omega(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2+1)-i\frac{\gamma\hbar}{2m}(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2). \tag{9}$$

式 (9) の $\hbar\omega$ に比例する部分に注目すると，$a_1^\dagger a_1$ の部分は通常の調和振動子に一致し正の固有値を与える．一方，$a_2^\dagger a_2$ の部分は符号が逆であり，a_2 を消滅演算子 $(a_2|0\rangle=0)$ とする限り負の固有値を与える．したがって，エネルギーの

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 錦城高等学校　[3] 日大・量科研

正定値性が保障されない．そこで，$b_2 := a_2^\dagger$ を消滅演算子，$b_2^\dagger := a_2$ を生成演算子とし，真空状態を $b_2|0\rangle = 0$ と定義すると，$-a_2^\dagger a_2 = -b_2^\dagger b_2 + 1$ の固有値が正になるため，結果としてエネルギーの正定値性が保障される．しかし，交換関係が $[b_2, b_2^\dagger] = -\mathbb{I}$ であることから，状態ベクトルの 2 乗ノルムが不定値となり，確率解釈に支障をきたす．これを回避するため，次式で定義する新たな随伴共役 ‡ を考える：

$$b_2 = a_2^\dagger, \quad b_2^\ddagger := -b_2^\dagger = -a_2. \tag{10}$$

このとき，上記の交換関係は $[b_2, b_2^\ddagger] = \mathbb{I}$ と表すことができる．随伴共役を † から ‡ に変更することは，不定値の Hilbert 空間から定義される正定値の Krein 空間を用いることに相当する [2]．式 (10) で定義した演算子を用いると，式 (9) は

$$\hat{H} = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + b_2^\ddagger b_2 + 1) - i\frac{\gamma\hbar}{2m}(a_1^\dagger b_2 + b_2^\ddagger a_1) \tag{11}$$

と書ける．ここで，$\hat{H}$ は † のもとでは自己共役であったが，‡ のもとでは自己共役ではないことに注意しよう．いま，b_2 を消滅演算子，$b_2^\ddagger$ を生成演算子とし，真空状態を $b_2|0\rangle = 0$ と定義すると，$b_2^\ddagger b_2$ の固有値は正になり，したがってエネルギーの正定値性が保障される．同時に，状態ベクトルの 2 乗ノルムも正定値となり，確率解釈が可能になる．

式 (11) の固有値を求めるため，次のような演算子を導入する：

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + b_2), \qquad A_1^\ddagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + b_2^\ddagger), \tag{12}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1 + b_2), \quad A_2^\ddagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1^\dagger + b_2^\ddagger). \tag{13}$$

これらは交換関係 $[A_i, A_j^\ddagger] = \delta_{ij}\mathbb{I}$ をみたす．式 (12)(13) の演算子を用いると式 (11) は次のように表される：

$$\hat{H} = \hbar\omega(A_1^\ddagger A_1 + A_2^\ddagger A_2 + 1) - i\frac{\gamma\hbar}{2m}(A_1^\ddagger A_1 - A_2^\ddagger A_2). \tag{14}$$

また，$a_1|0\rangle = 0,\ b_2|0\rangle = 0$ から A_1 と A_2 に対して $A_1|0\rangle = 0,\ A_2|0\rangle = 0$ が成り立つ．すなわち，A_1 と A_2 は消滅演算子である．数演算子を $\mathcal{N}_1 := A_1^\ddagger A_1,\quad \mathcal{N}_2 := A_2^\ddagger A_2$ で定義し，これらに対する固有値方程式

$$\mathcal{N}_i|m_1, m_2\rangle\rangle = m_i|m_1, m_2\rangle\rangle, \quad i = 1, 2 \tag{15}$$

を考えると，固有値 m_i が $m_i = 0, 1, 2, \cdots$ と得られ，固有ベクトルが $|m_1, m_2\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_1! m_2!}}(A_1^\ddagger)^{m_1}(A_2^\ddagger)^{m_2}|0\rangle$ と求まる．このベクトルは，Krein 空間における直交規格条件 $\langle\langle m_1, m_2|n_1, n_2\rangle\rangle = \delta_{m_1,n_1}\delta_{m_2,n_2}$ を満足する．式 (14) のハミルトニアンを固有ベクトル $|m_1, m_2\rangle\rangle$ に作用し，式 (15) を用いると，エネルギー固有値が次のように得られる：

$$E_{m_1,m_2} = \left\{\hbar\omega(m_1 + m_2 + 1) - i\frac{\gamma\hbar}{2m}(m_1 - m_2)\right\}. \tag{16}$$

このエネルギー固有値は虚数部分を含んでいる．このことは，$m_1 > m_2$ のときに粒子の崩壊が，$m_1 < m_2$ のときに粒子の生成が起こっていることを示唆している．

4．位置演算子 $\hat{x}$ の時間発展

いま，式 (8)，(10)，(12)，(13) をもちいて，$\hat{x}$ と $\hat{y}$ を

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A_1 - A_2^\ddagger), \quad \hat{y} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A_1^\ddagger - A_2) \tag{17}$$

と表す．Heisenberg 描像において，$\hat{x}$ と $\hat{y}$ の時間発展 (Heisenberg 方程式の解) は $\hat{x}(t) = U^{-1}(t)\hat{x}U(t)$，$\hat{y}(t) = U^{-1}(t)\hat{y}U(t)$ で与えられる．ただし，$U(t)$ は時間発展の演算子 $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$ である．式 (14) と式 (17) を用いると，$\hat{x}(t)$ と $\hat{y}(t)$ は次のように求まる：

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(e^{-it\omega}A_1 - e^{it\omega}A_2^\ddagger), \\ \hat{y}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{\frac{\gamma}{2m}t}(e^{it\omega}A_1^\ddagger - e^{-it\omega}A_2). \end{aligned} \tag{18}$$

古典解 (2) と比較するために，$A_i|\alpha_1, \alpha_2\rangle\rangle = \alpha_i|\alpha_1, \alpha_2\rangle\rangle$ で定義される同時コヒーレント状態 $|\alpha_1, \alpha_2\rangle\rangle$ において，$\hat{x}(t)$ と $\hat{y}(t)$ の期待値をとる．実際に，$A_i|\alpha_1, \alpha_2\rangle\rangle = \alpha_i|\alpha_1, \alpha_2\rangle\rangle$ と $\langle\langle\alpha_1, \alpha_2|A_i^\ddagger = \langle\langle\alpha_1, \alpha_2|\alpha_i^*$ を用いると，次式が得られる：

$$x_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(\alpha_1 e^{-it\omega} - \alpha_2^* e^{it\omega}), \tag{19}$$

$$y_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{\frac{\gamma}{2m}t}(\alpha_1^* e^{-it\omega} - \alpha_2 e^{it\omega}). \tag{20}$$

ここで，$\alpha_i = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}C_i\ (i = 1, 2)$ とおくと，式 (19) は古典解 (2) に一致する．このように，本研究で行った量子化の方法は，期待値として正しい古典解を導く．一方，式 (20) は増幅する振動を表しており，$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0$ の解になっている．

5．まとめと今後の課題

本研究では，減衰する調和振動子の量子化を試みた．消滅・生成演算子の読みかえを行い，新たな随伴共役 ‡ を定義することで，エネルギー固有値の実部が正定値であり，かつ状態ベクトルの 2 乗ノルムも正定値になるような定式化が可能になった．また，コヒーレント状態における Heisenberg 方程式の解の期待値は，古典解に一致することを示した．

今回は，力学変数 y を仮想的なものとしたが，最近，これを現実的な自由度と捉え，x と y が結合している次のような調和振動子模型が考えられている [3]：

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = -\epsilon y, \quad m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = -\epsilon x. \tag{21}$$

今後の課題として，このような系に対する量子化を本研究の視点から考察することが挙げられる．

参考文献

[1] H. Bateman, Phys. Rev. **38** 815 (1931).

[2] A. Mostafazadeh, Phys. Rev. D **84**, 105018 (2011).

[3] C. M. Bender, et al., Phys. Rev. A **88** 062111 (2013).