P-1

土倉[1]･堀口･村瀬･*Halley* 法(拡張 *Halley* 法)とその収束Ⅱ (不等式の場合，初等関数の収束比較)

Tsuchikura[1]･Horiguchi･Murase･Halley's method(Expansion of Halley's Method) and the conditions of convergenceⅡ(In the case of inequality, convergence comparisons of elementary functions)

堀口　俊二[2]
Shunji Horiguchi

Abstract : §1 は関数 $y=f(x)$ の独立変数 x の $x^q=t$ による変数変換した関数 $y=g(t)$ を与える．§2 は *Halley* 法とその拡張の土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法(拡張 *Halley* 法)を与える．§3 は土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法の収束比較式を与える．§4 は初等関数の *Halley* 法と土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法の収束比較式を与える．

1. 関数 $y=f(x)$ の $x^q=t$ による関数の定義

定義 1.1.　実変数 x の関数 $y=f(x)$ を $x=t^{1/q}$ $(q\neq 0)$により変数変換した関数を $y=g(t)$ とする．すなわち

$$g(t):=f(t^{1/q})=f(x)$$

この関数は $g(x^q)=f(x)$ となるから, $y=f(x)$ を高さは変えないで x 軸方向に $x^q=t$ だけ伸縮したグラフとなる．

定理 1.2.　曲線 $y=g(t)$ は

$$g''(t)=\frac{x\,f''(x)+(1-q)\,f'(x)}{q^2x^{2q-1}}>0\,(<0)$$

となる区間なら，そのグラフは下に凸(上に凸)となる．

定理 1.3.　$y=f(x)$ の曲率 $\mu(x)=\dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$ は

$y=g(t)$ の曲率

$$\mu_q(t)=\frac{g''(t)}{(1+g'(t)^2)^{3/2}}=\frac{\dfrac{xf''(x)+(1-q)f'(x)}{x}}{(qx^{q-1})^2\left(1+\left(\dfrac{f'(x)}{qx^{q-1}}\right)^2\right)^{3/2}}$$

に移る．特に $\mu_1(x)=\mu(x)$ となる．

2. *Halley* 法と土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法（*THMH* 法）

定義 2.1.　実変数 x の方程式 $f(x)=0$ の解(根) α を近似する次の漸化式を **Halley's method** という．

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Halley 法を拡張する．$y=g(t)$ に *Halley* 法を行い，それを $f(x_n)$ で表すと次の x_{n+1} の q 乗の漸化式を得る．

定理 2.2

$$x_{n+1}^q=x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)\left(\dfrac{1}{qx_n^{q-1}}f''(x_n)+(1-q)\dfrac{1}{x_n}f'(x_n)\right)}{f'(x_n)}}$$

定義 2.3.　この漸化式を**土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法**（***THMH* 法**）あるいは**拡張 *Halley* 法**という．特に $q=1$のとき *Halley* 法になる．

THMH 法の計算は次式で行う．

$$x_{n+1}=\left[x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)\left(\dfrac{1}{qx_n^{q-1}}f''(x_n)+(1-q)\dfrac{1}{x_n}f'(x_n)\right)}{f'(x_n)}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

3. 土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法(*THMH* 法)の収束比較条件式

定理 3.1.　*Halley* 法は，αが単根で，x_n がαの近傍のとき，次の 3 次収束の近似をする．

$$x_{n+1}-\alpha\doteqdot\frac{(1/4)f''(\alpha)^2-(1/6)f'(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3$$

αが $m(\geqq 2)$重根のとき，次の 1 次収束をする．

$$x_{n+1}-\alpha\doteqdot\left(1-\frac{2}{m+1}\right)(x_n-\alpha)$$

定理 3.2.　数列$\{x_n\}$において $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ とする．q, r を 0 でない任意な実数定数とする．このときαに十分近い x_n に対して次式を得る．

$$x_n^q-\alpha^q\doteqdot\frac{q}{r}\alpha^{q-r}(x_n^r-\alpha^r)$$

この定理より実数 q に関して，次の定理が証明できる．

定理 3.3.　*THMH* 法は，αが単根で, x_n がαの近傍のとき，実数定数 $q(\neq 0)$に対して次の 3 次収束の近似をする．

1 東北大学名誉教授 土倉保　2 新潟産業大学

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \frac{\left(\begin{array}{l}\frac{(q-1)^2}{4\alpha^2}f'(\alpha)^2-\frac{(q-1)f'(\alpha)f''(\alpha)}{\alpha}+\frac{1}{4}f''(\alpha)^2\\ -\frac{1}{6}f'(\alpha)\left(f'''(\alpha)+(2q-1)(q-1)f'(\alpha)\right)\end{array}\right)}{f'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3$$

αが $m(\geqq 2)$重根のとき，次の 1 次収束をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq (1-2/(m+1))(x_n-\alpha)$$

定理 3.4.　αを $f(x)=0$ の単根とする．*THMH* 法が *Halley* 法より収束が速いか等しいための必要十分条件は，実数 q が不等式

$$\left|1+\frac{\left(\frac{(q-1)^2}{4\alpha^2}-\frac{1}{6}(2q-1)(q-1)\right)f'(\alpha)^2-\frac{(q-1)f'(\alpha)f''(\alpha)}{\alpha}}{\frac{1}{4}f''(\alpha)^2-\frac{1}{6}f'(\alpha)f'''(\alpha)}\right|\leq 1$$

すなわち

$$0\leq\frac{(q-1)f'(\alpha)^2\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\alpha^2}\right)q-\frac{1}{6}+\frac{1}{4\alpha^2}+\frac{f''(\alpha)}{\alpha f'(\alpha)}\right]}{\frac{1}{4}f''(\alpha)^2-\frac{1}{6}f'(\alpha)f'''(\alpha)}\leq 2$$

を満たすことである．

系 3.5.　(1)　$f''(\alpha)\neq 0, f'''(\alpha)=0$ のとき，定理 3.4 の不等式は次式となる．

$$0\leq\frac{(q-1)f'(\alpha)^2\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{\alpha^2}\right)q-\frac{2}{3}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{4f''(\alpha)}{\alpha f'(\alpha)}\right]}{f''(\alpha)^2}\leq 2$$

(2)　$f''(\alpha)=0, f'''(\alpha)\neq 0$ のとき，定理 3.4 の不等式は次式となる．

$$0\leq\frac{(1-q)f'(\alpha)\left[\left(2-\frac{3}{2\alpha^2}\right)q-1+\frac{3}{2\alpha^2}\right]}{f'''(\alpha)}\leq 2$$

曲線の凹凸を表す $g''(t)$ や曲率 $\mu_q(x^q)$ を用いて定理 3.4 の式を変形できる．しかし，これは複雑なので別稿で行う．

方程式 $f(x)=0$ を $h(x)=0$ に式変形する．この $h(x)$の r 乗の *THMH* 法は

$$x_{n+1}^r=x_n^r-qx_n^{r-1}\frac{h(x_n)}{h'(x_n)-\frac{1}{2}\frac{h(x_n)\left(\frac{1}{qx_n^{r-1}}h''(x_n)+(1-r)\frac{1}{x_n}h'(x_n)\right)}{h'(x_n)}}$$

であり，α が単根のとき次の 3 次収束をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \frac{\left[\begin{array}{l}\frac{(r-1)^2}{4\alpha^2}h'(\alpha)^2-\frac{(r-1)h'(\alpha)h''(\alpha)}{\alpha}+\frac{1}{4}h''(\alpha)^2\\ -\frac{1}{6}h'(\alpha)\left(h'''(\alpha)+(2r-1)(r-1)h'(\alpha)\right)\end{array}\right]}{h'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3$$

命題 3.6.　$f(\alpha)=0$, $h(\alpha)=0$ とし，αは単根とする．$f(x)$の q 乗の *THMH* 法の 3 次収束の$(x_n-\alpha)^3$ の｜係数｜≦r 乗の $h(x)$の *THMH* 法の 3 次収束の$(x_n-\alpha)^3$ の｜係数｜ を満たすとき，$f(x)$の q 乗の *THMH* 法は $h(x)$の r 乗の *THMH* 法より収束が速いか等しい．

4.　初等関数の *Halley* 法と *THMH* 法の収束比較式

例4.1.　$f(x)=(x-a)(x-b)=0,(a\neq b)$ の根はa,b である．
$f''(x)=2, f'''(x)=0$ であるから，系 3.5 の(1)の式を適用して次式を得る．ここでαはa あるいはb である．

$$0\leq(q-1)(2\alpha-(a+b))^2\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{\alpha^2}\right)q-\frac{2}{3}\\ +\frac{1}{\alpha^2}+\frac{8}{\alpha(2\alpha-(a+b))}\end{array}\right]\leq 8$$

例 4.2.　$f(x)=(x-\alpha)^3+\alpha(x-\alpha)=0$ の根はαである．

$f''(\alpha)=0, f'''(x)=6\neq 0$ であるから，系 3.5 の(2)の式を適用して次式を得る．

$$0\leq(1-q)\left[\left(2\alpha-\frac{3}{2\alpha}\right)q-\alpha+\frac{3}{2\alpha}\right]\leq 12$$

定理 4.3.　(1)　$f(x)=\sin x=0$ のとき，根 $n\pi$(n は 0 以外の整数)に収束する速さが，q 乗の *THMH* 法が *Halley* 法より速いか等しい q の範囲は，　$0\leq(q-1)(2q-1)\leq 2$　である．
(2)　$f(x)=\cos x=0$ のとき，根$(1/2+n)\pi$ (n：整数)に収束する速さが，q 乗の *THMH* 法が *Halley* 法より速いか等しい q の範囲は　$0\leq(q-1)(2q-1)\leq 2$　である．
(3)　$f(x)=\tan x=0$ のとき，根 $n\pi$(n は 0 以外の整数)に収束する速さが，q 乗の *THMH* 法が *Halley* 法より速いか等しい q の範囲は，$0\leq(-1/2)(q-1)(2q-1)\leq 2$　である．

定理 4.4.　(1)　$f(x)=e^x-2=0$ のとき，不等式

$$0\leq(q-1)\left[\left(1-\frac{3}{4(\log 2)^2}\right)q-\frac{1}{2}+\frac{3}{4(\log 2)^2}+\frac{3}{\log 2}\right]\leq\frac{1}{2}$$

を満たす実数 q に対して，根 log2 に収束する速さは，q 乗の *THMH* 法が *Halley* 法より速いか等しい．

(2)　$f(x)=\log x=0$　のとき，$0\leq(1-q)(q-11)\leq 2$ を満たす実数 q に対して, 根 1 に収束する速さは, q 乗の *THMH* 法が *Halley* 法より速いか等しい．

参考文献

[1] 村瀬義益著･西田知己校注：『算法勿憚改』(1673)，研成社，1993
[2] 土倉･堀口･村瀬･*Halley* 法(拡張 *Halley* 法)とその収束 I (等式の場合),平成 25 年度日本大学理工学部学術講演会予稿集, 数学部会, pp. 1267-1268., 日本大学理工学部
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method
[4] 永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980.3