P−14

Shape fluctuations in first passage percolation

久保田直樹[1]

Abstract: We consider first passage percolation on the d dimensional cubic lattice, i.e., we assign independently to each edge a nonnegative random weight with a common distribution and consider an induced random graph distance (which is the so-called first passage time). We use the entropy method introduced by Bucheron, Lugosi and Massart to estimate the fluctuations of the shape induced by the first passage time from the origin.

1　はじめに

樹木が正方格子状に並んだ果樹園において，ある木で病気が発症したとする．病気は隣接する 4 本の木にのみ伝染し，その確率は独立に p ずつであるとする．このとき，「ある木で発症した病気が，果樹園の樹木にどのように伝染していくか」を問題として扱うのが，パーコレーションである．これに関連して，Hammersley–Welsh [4] によって導入されたファーストパッセージパーコレーションがある．ファーストパッセージパーコレーションでは，一旦病気に感染した木 a から隣接する木 b には，ランダムな時間 $t(\{a,b\})$ で病気が伝染するとし，「ある範囲まで病気が広がる時間とその感染経路」を問題として扱う．今回，このモデルに対し，時刻 t までに病気が伝染する範囲 $B(t)$ の形状の漸近挙動について研究を行った．

2　モデル

この章では，今回扱うファーストパッセージパーコレーションについてより詳しく説明を行う．$\mathcal{E}$ を正方格子 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ の辺集合とし，weights $(t(e))_{e\in\mathcal{E}}$ を独立同分布な非負値確率変数列であるとする．($\mathbb{Z}^d$ の各頂点を果樹園の木，$t(e)$ を木から木へ病気が伝染するランダムな時間とみなす．) このとき，$\mathbb{Z}^d$ の辺を「$e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_l$」と辿る経路 π において，その passage time を

$$\tau(\pi) := \sum_{i=1}^{l} t(e_i)$$

で定義する．さらに，$\mathbb{Z}^d$ の頂点 x から y への first passage time を以下で定義する:

$$\tau(x,y) := \inf\{\tau(\pi); \pi \text{ は } \mathbb{Z}^d \text{ の頂点 } x \text{ から } y \text{ への経路 }\}.$$

ここで問題とするのは，原点 0 からの first passage time が時間 t 以下となるような点の集まり

$$B(t) := \left\{x+h; x\in\mathbb{Z}^d,\ \tau(0,x)\leq t,\ h\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d\right\}, \qquad t>0$$

の漸近挙動である．

3　結果

この章では, 今回得られた結果について紹介する．まず最初に，次の条件 (A1) と (A2) を導入する．ただし，p_c は $\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーションの臨界確率である:

(A1) $\mathbb{P}(t(e)=0) < p_c$.

[1] 日大理工・研究員

(A2) $\mathbb{E}[t(e)^2] < \infty$.

条件 (A1) と (A2) が成り立つならば，$\mathbb{R}^d$ のある部分集合 $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ (より正確には，B_0 は nonrandom かつコンパクトな凸集合であり，さらに空でない内部を持つ) が存在して，すべての $\epsilon > 0$ に対して， 確率 1 で次が成立することが知られている: 十分大きな $t > 0$ に対して，

$$(1-\epsilon)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\epsilon)B_0.$$

詳細については，例えば [5, Section 3] を参照されたい．この結果に対し，Kesten [6] と Alexander [1] は $B(t)/t$ が B_0 へ漸近していくときの揺らぎを精密に調べ，それは最大でも $\epsilon = O(t^{-1/2}\log t)$ 程度であることを示した．そこでは，上の仮定 (A2) よりかなり強い条件「ある $\gamma > 0$ に対して $\mathbb{E}[e^{\gamma t(e)}] < \infty$」を仮定している．今回，この条件を弱めた場合の漸近挙動について Damron 氏 (Assistant Professor, Indiana University) と共同研究 [3] を行い，以下の結果を得ることができた.

Theorem 3.1. 条件 (A1) と (A2) を仮定する．このとき，ある定数 $C, C' > 0$ が存在して確率 1 で次が成立する: 十分大きな $t > 0$ に対して，

$$\{1 - Ct^{-1/2}(\log t)^4\}B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset \{1 + C't^{-1/2}(\log t)^{1/2}\}B_0.$$

Remark 3.2. 実際には，(A2) より少し弱い仮定でもこの定理は成立する．その場合，$B(t)/t$ の inner bound と outer bound で異なる仮定が必要になる．そこで本稿では，煩雑さを避けるために条件 (A2) を仮定した．(ただし，条件 (A2) も十分良い仮定であることを注意しておく．) より一般の場合については [3] を参照されたい.

この定理の証明には，次の entropy と呼ばれる関数が大きな役割を果たす: 非負確率変数 X に対して，

$$Ent(X) := \mathbb{E}[X \log X] - \mathbb{E}[X] \log \mathbb{E}[X].$$

実際には $X = e^{\lambda\tau(0,x)}$ ととり，$Ent(X)$ を考える．大雑把に説明すると，この $Ent(X)$ は 2 つの非常に近い配列の weights に対する first passage times の誤差を表している．この誤差が上手く評価できれば martingale argument により，first passage time とその期待値のよい誤差評価を得られることが知られている [6]．First passage time とその期待値はそれぞれ $B(t)$ と tB_0 に対応するため，entropy の解析が主定理に繋がるのである．Entropy については近年，Bucheron–Lugosi–Massart らによって積極的に研究が行われている．(詳しくは，その一連の研究をまとめた書籍 [2] を参照されたい．) しかし，ファーストパッセージパーコレーションには彼らの議論を直接適用できないため，修正を行う必要があった.

参考文献

[1] K. S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *The Annals of Probability*, 25(1):30–55, 1997.

[2] S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart. *Concentration inequalities: A nonasymptotic theory of independence.* Oxford University Press, 2013.

[3] M. Damron and N. Kubota. Gaussian concentration for the lower tail in first-passage percolation under low moments. arXiv:1406.3105, 2014.

[4] J. Hammersley and D. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pp. 61–110. Springer, 1965.

[5] H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, Vol. 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 125–264. Springer, Berlin, 1986.

[6] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pp. 296–338, 1993.