P-15

弱い従属性を持つ確率変数列の和の極限分布について
Limiting distributions of normalized partial sums from strong mixing subsequences

○高橋　弘 [1]
*Hiroshi TAKAHASHI[1]

Abstract: Semi-selfdecomposable distributions are given as limitis of subsequences of normalized sums of independent random variables. In this talk, we show that the semi-selfdecomposable distributions can be also produced by strong mixing subsequences.

1. 序論

適切な条件を満たす独立な確率変数列の和には，あるスケーリングの下で自明ではない極限分布が現れる。この分布は確率変数列と条件に応じて，無限分解可能分布の様々なサブクラスに属する (佐藤 [5], Sato [6])。独立性の条件は無限分解可能分布の理論の中で重要な位置を占める。

一方で，確率変数列の独立性を弱めた場合は，1956 年に Rosenblatt によって導入された “strong mixing condition” の下で，中心極限定理・不変原理・安定分布への収束などが研究されている (Ibragimov and Linnik [3], Yoshihara [7])。最近，Bradley と Jurek が strong mixing condition を満たす確率変数列の和の極限として自己分解可能分布が導出されることを示した ([2])。この結果の拡張は複数の方面で考えられるが，本報告では従属確率変数列の部分列の和の極限から得られる分布への拡張について考察する。

1. 定義と既知の結果

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする。$\mathcal{F}$ の部分 σ 集合族 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対し

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}} |P(A\cap B) - P(A)P(B)|$$

とする。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で Banach 空間 E に値をとる確率変数列 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ に対して，$\sigma(\ldots)$ で $(\ldots)$ から生成される σ-field を表す。また

$$\alpha(n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \alpha(\sigma(X_k, 1\le k\le j), \sigma(X_k, k\ge j+n))$$

とする。任意の n について $\alpha(n) \in [0, 1/4]$ であり，さらに独立な確率変数列の場合は $\alpha(n) = 0$ である。

定義 1 (strong mixing condition)
$\mathbf{X}$ が strong mixing とは，$\alpha(n) \to 0$ as $n \to \infty$ となることである。

注意　従属性の条件は，$\alpha(n)$ によるものの他にも複数の定義があるが，strong mixing condition が一番弱く，基本的な条件となっている ([1])。

定義 2 (無限小の条件)
無限に増大する正の実数列 $\{a_n\}$ と整数列 $\{k_n\}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} P\left(a_n^{-1}\|X_j\| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0$$

を満たすとき，$\mathbf{X}$ は無限小の条件を満たすという。

Bradley と Jurek は，strong mixing condition を満たす確率変数列と自己分解可能分布 (この定義は後述する) の次の関係を示した：

命題 ([2])
$\mathbf{X}$ に対し $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。また，次の条件を満たす実数列 $\{a_n\}$ と $b_n \in E$ の存在を仮定する：

(i) $\mathbf{X}$ は strong mixing である。

(ii) $\{a_n\}, \{n\}$ について，$\mathbf{X}$ は無限小の条件を満たす。

(iii) $\{a_n^{-1}S_n + b_n\}$ の分布は自明でない確率分布に収束する。

このとき，極限分布 μ は自己分解可能分布である。

---
[1] 日大理工・教員・一般

自己分解可能分布の拡張として，半自己分解可能分布が [4] で導入された。概略は以下のとおりである：

独立な $\mathbb{R}^d$-値確率変数列 $\mathbf{X}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = c$ となる $c \in (0,1)$ と $b_n \in \mathbb{R}^d$ が存在して，$\{a_n\}, \{k_n\}$ によって無限小の条件を満たし，かつ $\{a_n^{-1} S_{k_n} + b_n\}$ の分布が自明でない分布 μ に収束するとき，その極限分布 μ を半自己分解可能分布と呼ぶ。また，半自己分解可能分布 μ の特性関数は，μ と b による無限分解可能分布の特性関数を用いて分解できる。

この講演では，従属性を持つ確率変数について，半自己分解可能分布への収束定理を考察する：

定義３ (c-分解可能分布, Definition 64.1 at [6, page 453])

確率分布 μ が c-分解可能であるとは，$c \in (0,1)$ と分布 ρ が存在して

$$\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}(cz)\widehat{\rho}(z), \qquad z \in E^*$$

と分解できることを言う。また，任意の $c \in (0,1)$ で分解できる場合を自己分解可能分布と言う。

2. 結果

定理 (半自己分解可能分布)

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ を $\{a_n^{-1} X_j,\ 1 \le j \le k_n, n \in \mathbb{N}\}$ が無限小の条件を満たす strong mixing な確率変数列とする。$a_n/a_{n+1} \to c \in (0,1)$ と $b_n \in E$ が存在して，$a_n^{-1} S_{k_n} + b_n$ が非退化の確率変数に収束するとき，その分布は半自己分解可能である。

3. 証明の方針

自然数 $m = m(n)$ を，$k_{n+1} - k_n > m$ かつ $m \to \infty$ as $n \to \infty$ として，さらに以下を満たすようにとる：

$$a_{n+1}^{-1} \sum_{k=k_n+1}^{k_n+m} X_k \to 0 \quad \text{in probability.}$$

この和を用いて次の分解を考える：

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{n+1}} X_k + b_{n+1} &= \frac{a_n}{a_{n+1}} \left(a_n^{-1} \sum_{k=1}^{k_n} X_k + b_n \right) + a_{n+1}^{-1} \sum_{k=k_n+1}^{k_n+m} X_k \\ &\quad + \left\{ a_{n+1}^{-1} \sum_{k=k_n+m+1}^{k_{n+1}} X_k + \left(b_{n+1} - \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n \right) \right\} \\ &=: U_n + V_n + W_n, \end{aligned}$$

上記の分割は，strong mixing である $\mathbf{X}$ の従属性をブロックすることを目的としている。左辺 $\{a_{n+1}^{-1} S_{k_{n+1}} + b_{n+1}\}$ の分布が確率変数 Y に弱収束するとき，U_n は cY に弱収束する。また，V_n が 0 に確率収束し，$\{W_n\}$ が適当な確率変数 Z に弱収束することを示すことで定理は証明される。

参考文献

[1] Bradley, R. C. (2005), *Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions,* Probability Survey **2**, pp. 107–144.

[2] Bradley, R. C. and Jurek, Z. J. (2014), *The strong mixing and the selfdecomposability properties,* Statistics and Probability Letters **84**, pp. 67–71.

[3] Ibragimov, I. A. and Linnik, Y. V. (1971), *Independent and Stationary Sequences of Random Variables,* Wolters-Noordhoff.

[4] Maejima, M. and Naito, Y. (1998), *Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems,* Probability Theory and Related Fields **112**, pp. 13–31.

[5] 佐藤健一 (1981), 無限分解可能分布, Seminar on Probability **52**, 確率論セミナー

[6] Sato, K. (2013), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Revised edition,* Cambridge University Press.

[7] Yoshihara, K. (1992), *Weakly Dependent Stochastic Sequences and Their Applications vol.* I, *Summation Theory for Weakly Dependent Sequences,* SANSEIDO.