P-2

項のまばらな Thue 方程式の整数解の個数

Number of the integer solutions to Thue equations with few coefficients

中村 俊之
Nakamura Toshiyuki[1]

Abstract

In this talk, we consider the number of the integer solutions to Thue equations of degree $r \geq 3$ with integer coefficients. We investigate the number of the solutions in the case where at most $s+1$ of the $r+1$ coefficients of the equation are non-zero with $s \leq r$.

1 Introduction

$\mathbb{Q}$ 上既約な 2 変数の斉次形式 $F(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ を考える．その次数を r とおく．いま $r \geq 3$ と仮定し，$h \in \mathbb{Z}$, $h \neq 0$ を固定して方程式

$$F(x,y) = h \tag{1}$$

を考える．ただし方程式の未知数 x, y は整数 $\mathbb{Z}$ の中で考えるものとする．この方程式 (1) を Thue 方程式と呼ぶ．

A. Thue によって示されたディオファントス近似によって，Thue 方程式の整数解は有限個に限ることが示されている．整数解の個数の上からの評価については 1980 年代の後半以降の W. M. Schmidt, J.-H. Evertse らによる先行研究 [3] [7] がある．しかし等号による個数の表示は難しい問題である．また (1) のように F が 2 変数の場合は A. Baker の対数一次形式の理論を用いて，整数解を求められるような解の絶対値の上限も存在することが知られている．F が 3 変数以上の場合には解の絶対値の該当する評価の存在については，未解決である．ここでは $s \leq r$ とし，この (1) の左辺の F の $r+1$ 個の項のうち係数が 0 ではない項が $s+1$ 個以下しかない場合に，方程式の整数解の個数がどのようになるかを議論する．

(1) において等号を不等号にした場合 (2) を Thue 不等式と呼ぶ．Thue 不等式については W.M.Schmidt [6] によって以下の結果が得られている．

Theorem (Schmidt)
$F(x,y) = a_0x^r + a_1x^{r-1}y + \cdots + a_ry^r \in \mathbb{Z}[x,y]$ を $\mathbb{Q}$ 上既約な 2 変数の斉次形式 $F(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ とし，その次数を r とおく．$r \geq 3$ と仮定する．さらに $s \leq r$ とし，$F(x,y)$ の $r+1$ 個の項のうち，係数が 0 ではないものは $s+1$ 個以下であると仮定する. このとき, 与えられた $h \geq 1, h \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$|F(x,y)| \leq h \tag{2}$$

を満たす整数解 (x,y) の個数 $N(h) = N_F(h)$ は

$$N(h) \ll (rs)^{1/2} h^{2/r} (1 + (\log h)^{1/r}) \tag{3}$$

を満たす．ただし $\ll$ は絶対定数のみの依存を含むものとする．

上記の定理の証明の手法を用いると Thue 方程式たとえば $F(x,y) = 1$ の場合の整数解の個数は $\ll (rs)^{1/2}$ であることが得られる．$s \leq r$ であるから，整数解の個数は $\ll r$ となり，E. Bombieri および Schmidt [1][2] によって得られた評価を従える．また $F(x,y) = h$ の primitive つまり x, y の最大公約数が 1 であるような整数解の個数に対しては，Bombieri および Schmidt [1][2] によって

$$\ll r^{1+\nu} \tag{4}$$

という評価が得られている. ここで, ν は h の異なる素因数の個数を表すとする.

この両者 (3),(4) の評価を比較すると，まず r が固定され,h が十分大きい場合に対しては (4) の評価のほうがよい．逆に h が固定され，r が十分大きい場合には (3) の評価がよいことが分かる.

また Thue 不等式の解の個数に対する (3) の中の $h^{2/r}$ は必須の項であることが簡単な考察によって分かる.

2 実数解の個数が固定された方程式の類

$0 \leq t \in \mathbb{Z}$ を考える．どんな実数 $u \neq 0, v \neq 0$ に対しても $uF_x + vF_y = 0$ の実根が t 個以下になるような，次

[1]株式会社マイナビ

数 r の $\mathbb{Q}$ 上既約な 2 変数の斉次形式 $F(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ の集合を考え，$C(t)$ とおく．

このとき次が成り立つ．

Theorem (Schmidt)
$F(x,y) \in C(t)$ ならば (2) の整数解の個数 $N(h)$ は $N(h) \ll (rt)^{1/2}h^{2/r}(1+(\log h)^{1/r})$ を満たす．

ここで $r>0$ に対しては F の既約性より，次数 $r-1$ の斉次形式 uF_x+vF_y は恒等的に 0 にはならないことが分かる，また $F \in C(t)$ ならば $f'(z)=F_x(z,1)$ は t 個以下の実根を持つ．

この証明における実数解の配置に関する考察は初等的であって面白く，今後の Thue 方程式の考究に役立つと思われる．証明の核となる補題とその証明を紹介しよう．

LEMMA 1
$g(z)$ は $g(0) \neq 0$ を満たす実数係数の多項式であり，そのちょうど $s+1$ 個の項が 0 ではない係数を持つとする．このとき $g(z)$ の異なる実根は $2s$ 個以下である．

Proof
$s=0$ のとき $g(z)$ はゼロではない定数である．従って主張は正しい．
$s>0$ と仮定する．導関数 $g'(z)$ は恒等的にゼロにはならない．$h(z)$ を $h(0) \neq 0$ かつ，ちょうど s 個の 0 ではない係数の項を持つ多項式として，$g'(z)=z^m h(z)$ と書いても一般性を失わないことが分かる．s に関する帰納法の仮定より g' は $2s-1$ 個以下の実根をもつ．従って g 自身は $2s$ 個以下の実根を持つ．　□

LEMMA 2
$F(x,y)=a_0x^r+a_1x^{r-1}y+\cdots+a_ry^r \in \mathbb{Z}[x,y]$ を $\mathbb{Q}$ 上既約な 2 変数の斉次形式とし，$s+1$ 個の 0 ではない係数の項を持つとする．このとき F は $C(4s-2)$ に属する．

Proof
与えられた $u \neq 0, v \neq 0$ に対し

$$uF_x+vF_y=x^ky^lQ(x,y) \tag{5}$$

と書く．ただし $Q(1,0)\neq 0, Q(0,1)\neq 0$ である．
この (5) のゼロではない係数を持つ項の数は $\leq 2s$ である．しかも x^{r-1} と y^{r-1} 以外の項については $2s-2$ 個以下である．さて $Q(x,y)$ の実根は $g(z)=Q(z,1)$ の実根の個数とおなじである．$k=l=0$ のとき，$g(z)$ の実根の個数は $\leq 2\times(2s-1)=4s-2$ であることが Lemma 1 から従う．以上より (5) の実根の個数は $\leq 4s-2$ であることが得られる．

$k>0, l=0$ のとき，$g(z)$ のゼロではない係数を持つ項の数は $\leq 2s-1$ であり，$g(z)$ の実根の個数は $\leq 2\times(2s-2)=4s-4$ であり，(5) の実根の個数は $\leq 4s-4+1<4s-2$ となる．$k=0, l>0$ のときも同様である．

$k>0, l>0$ のとき，$g(z)$ の実根の個数は $\leq 2\times(2s-3)=4s-6$ であり，(5) の実根の個数は $\leq (4s-6)+2<4s-2$ となる．　□

References

[1] E. Bombieri & W. M. Schumidt, *On Thue's equation*, Invent. Math., **88**, no. 1, (1987), 69–81.

[2] E. Bombieri & W. M. Schumidt, *Correction to: "On Thue's equation"*, Invent. Math., **97**, no. 2, (1989), 445.

[3] J. -H. Evertse, *An improvement of the quantitative Subspace theorem*, Compositio Math., **101**, (1996), 225–311.

[4] W. M. Schmidt, *Norm form equations*, Ann. of Math., **96**, (1972), 526–551.

[5] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer, 1980.

[6] W. M. Schumidt, *Thue Equations with Few Coefficients*, Transactions of the American Math. Soc., **303**, no.1, (1987), 241–255.

[7] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation and Diophantine Equations*, Lecture Notes in Math., **1467**, Springer, 1991.

[8] A. N. Parshin & I. R. Schfarevich (eds.), N. I. Fel'dman & Yu. V. Nesterenko (authors), *Number Theory*, IV, Encyclopaedia of Math., **44**, Springer, 1998.

[9] A. B. Shidlovskii, *Transcendental Numbers*, Studies in Math., **12**, Walter de Gruyter, 1989.

[10] A. Thue, *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen*, J. Reine Angew. Math. **135**, (1909), 184–305.