P-4

$K3$ 曲面の有限シンプレクティック自己同型に対する固定点公式

The fixed point formula for finite symplectic automorphisms of $K3$ surfaces

○中村周平 [1]，佐々木隆二 [2]
*Shuhei Nakamura[1],Ryuji Sasaki[2]

Abstract: In this note, we determine the fixed point formula for finite symplectic automorphisms of $K3$ surfaces according to Mukai [1].

コンパクトな 2 次元複素多様体 S が, $K_S \sim 0$ でかつ $\dim H^1(\mathcal{O}_S) = 0$ となるとき, S を $K3$ 曲面という. S の自己同型は正則 2 次形式 ω を保存するとき, シンプレクティック自己同型と呼ばれる.

$K3$ 曲面 S のコホモロジーの計算結果は

$$\dim H^0(\mathcal{O}_S) = 1, \dim H^1(\mathcal{O}_S) = 0, \dim H^2(\mathcal{O}_S) = 1$$

であり, S のシンプレクティック自己同型 ϕ は $H^2(\mathcal{O}_S)$ 上自明になるので

$$\Lambda_\phi := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{Trace}(\phi^*|_{H^i(\mathcal{O}_S)}) = 2$$

となる. このことから, $K3$ 曲面のシンプレクティック自己同型は固定点を持つことが判る.
ここで, 次の補題を用意する.

補題 1. S の有限自己同型群 G が固定点 P を持つとする. このとき自然な準同型 $G \to GL(t_{S,P})$ は単射となる. ただし, $t_{S,P}$ は S の点 P における接空間とする.

この補題は, 特に, G の元の位数と, その固定点におけるヤコビ行列の位数とが一致していることを示している.

f を $K3$ 曲面 S のある点 P を固定する有限位数 n の非自明シンプレクティック自己同型とする.
そのときヤコビ行列は, $\det(df)_P = 1$ を満たすので, 補題 1 により固有値 ζ, ζ^{-1} をもつ. ただし, ζ は 1 の原始 n 乗根である. よって固定点は孤立していて, その固定点集合 $\mathrm{Fix}(f)$ は有限集合であることが判る.

このことから, 固定点公式を求めるにあたって中心的な役割をなす次の定理 ($cf.$ [2]) を導入することができる.

定理 2 (holomorphic Lefschetz fixed point formula)**.** S を d 次元コンパクト複素多様体, $f : S \to S$ を固定点が孤立している自己同型とする. このとき

$$\sum_{P \in \mathrm{Fix}(f)} \nu(f, P) = \Lambda_f$$

となる. ただし, $\nu(f, P) = \dfrac{1}{\det(1 - (df)_P)}$ である.

定理の式はコホモロジーの計算結果から

$$\sum_{P \in \mathrm{Fix}(f)} \nu(f, P) = 2$$

となる.
もし k が n と互いに素ならば, $\mathrm{Fix}(f^k)$ と $\mathrm{Fix}(f)$ は一致するから

$$\sum_{P \in \mathrm{Fix}(f)} \nu(f^k, P) = 2.$$

---

[1] 日大理工・院 (前)・数学, [2] 日大理工・教員・数学

これにより算術平均:

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}\sum_{P\in\mathrm{Fix}(f)}\nu(f^k,P)=2$$

は

$$\sum_{P\in\mathrm{Fix}(f)}\frac{1}{\varphi(n)}\left(\sum_{k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}\nu(f^k,P)\right)=2 \qquad (*)$$

と変形できる.

$$\nu(f^k,P)=\frac{1}{\det(1-(df^k)_P)}=\frac{1}{(1-\zeta^k)(1-\zeta^{-k})}$$

となることに注意をすると, 式 $(*)$ の左辺は次の補題で計算される.

補題 3. ζ を 1 の原始 n 乗根とする. そのとき, 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\zeta^i)(1-\zeta^{-i})}=\frac{n^2-1}{12}$

(2) $\displaystyle\sum_{k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}\frac{1}{(1-\zeta^k)(1-\zeta^{-k})}=\frac{n^2}{12}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$

したがって,

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

であるから, 補題 3 により式 $(*)$ は

$$\sum_{P\in\mathrm{Fix}(f)}\left(\frac{n}{12}\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)=2$$

となる.
よって固定点公式:

$$|\mathrm{Fix}(f)|=24\left(n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{-1}$$

を得る.

参考文献

[1] Mukai,S.: “Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group”, Invent. Math, 94, 183-221, 1988

[2] P. Griffiths and J. Harris: “Principles of Algebraic Geometry”, John Wiley & Sons, 1978