P-5

有理数による無理数の近似

Approximations of irrational numbers by rationals

○河野 聡 [1]
*Kono So[1]

Abstract

In 1816, J. Farey defined a sequence of rational numbers which is the so-called Farey sequence to investigate continued fractions. In 1891, A. Hurwitz applied Farey sequence to obtain Diophantine approximations of irrational numbers by rational numbers. In this report, we introduce theorem of Hurwitz and give a brief sketch of the proof.

1 Irrational number

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ をそれぞれ実数, 有理数, 整数全体の集合とする. 実数は通常の絶対値 $|\cdot|$ による $\mathbb{Q}$ の完備化, 即ち収束する有理数列の極限全体として定義される. $\mathbb{Q}$ は可算集合.$\mathbb{R}$ は非可算集合であるため無理数即ち $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は非可算である. ではどのように個々の数が無理数であることを示せるであろうか. 以下に $e \notin \mathbb{Q}$ の証明を紹介しよう.
$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とすると以下が成り立つ:

$$a_n < a_{n+1}\ ,\ a_n < 3.$$

よって数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列となり収束する. この極限値を e と定める.

$\boxed{\text{例}}$ (e の無理数性) $f(x) = e^x$ とすると $f(x)$ は任意の点 a でテイラー展開可能である. 今 e が有理数であると仮定し

$$e = \frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

とおく.$f(x)$ をマクロリーン展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} (0 <^{\exists} \theta < 1)$$

と表せる. したがって $x = 1$ とおくと

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

である. これより

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \text{ 即ち}$$

$$n!\frac{e^\theta}{(n+1)!} = n!e - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \in \mathbb{Z} \quad (0 < \theta < 1)$$

であるから $n!\dfrac{e^\theta}{(n+1)!} = \dfrac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$. $e^\theta < e < 3$ より

$$0 < 1 \leq \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

が成り立ち,

$$n + 1 < 3 \Rightarrow n < 2 \Rightarrow n = 1$$

となる. よって $e = \dfrac{m}{n} = m$ となり,e は整数でなければならないがこれは $2 < e < 3$ に矛盾する.
従って e は無理数である. □

[1] 日大理工・院 (前)・数学

2 The Theorem of Hurwitz

有理数よりはるかに多い無理数であるが, その無理数を有理数によって近似する方法について考えよう. 以下で定まる有理数を並べた Farey 数列を用いて証明される Hurwitz の定理を紹介する.

DEFINITION 1 (ファレイ数列)
ファレイ数列 F_n とは $0 \leq^{\forall} n \in \mathbb{Z}$ に対し分母が n 以下で 0 以上 1 以下の有理数分数 $\dfrac{a}{b}$ 全てを大きさ順に並べた数列である.

$\boxed{\text{例}}$ $F_6 : \frac{0}{1}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{1}$

$F_7 : \frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}$

PROPOSITION (i) ファレイ数列 F_n の 2 つの連続した項を $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}(\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d})$ とすると $bc - ad = 1$ が成り立つ.
(ii)$^\forall \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, 0 \leq r \in \mathbb{Z}$ をとり固定する. 十分大きな n に対するファレイ数列を考えると θ の両隣の有理数 $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ の分母は必ず r よりも大きい.

$\boxed{\text{例}}$(i) F_7 の $\dfrac{2}{5}$ と $\dfrac{3}{7}$ について

$$bc - ad = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 1$$

(ii) $\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{10} \fallingdotseq 0.26, r = 3$ とすると $n = 7$ に対してファレイ数列を考えたとき

$$\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{7}}{10} < \frac{2}{7}$$

となり分母は 3 よりも大きい 4,7 となっている.

LEMMA 1 ファレイ数列 F_n の連続した 2 項を a/b , c/d とすると

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{1}{b(b+d)} \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

$$\text{かつ} \quad \left|\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{1}{d(b+d)} \leq \frac{1}{d(n+1)}$$

が成り立つ.

PROOF

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{|ad - bc|}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)} \leq \frac{1}{b(n+1)}.$$

2 つ目も同様にして示される. □

LEMMA 2 次の 2 つの不等式を同時に満たす正の整数 x, y は存在しない:

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$\text{かつ}\ \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right). \tag{1}$$

PROOF 正の整数 x, y が存在すると仮定すると (1) は $0 \geq x^2+y^2-\sqrt{5}xy$ かつ $0 \geq (2-\sqrt{5})(x^2+xy)+y^2$ であるから, 右辺同士を加えて

$$\{x^2+y^2-\sqrt{5}xy\}+\{(2-\sqrt{5})(x^2+xy)+y^2\} = \frac{1}{2}\{(\sqrt{5}-1)x-2y\}^2.$$

よって

$$0 \geq \frac{1}{2}\{(\sqrt{5}-1)x-2y^2\}^2. \tag{2}$$

(2) は成立しないので題意が示された. □

THEOREM (Hurwitz) $\forall\theta \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ に対し, 次の不等式を満たす有理数 h/k は無限個存在する:

$$\left|\theta-\frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}. \tag{3}$$

さらに (3) の $\sqrt{5}$ を $\beta > \sqrt{5}$ を満たす定数で置き換えることはできないことが示される.

PROOF ファレイ数列 F_n を考え,θ が F_n の連続した 2 項 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ の間にあるとする $\left(\frac{a}{b}<\theta<\frac{c}{d}\right)$.

1. $\theta > \frac{a+c}{b+d}$ の場合

Lemma 2 より以下 3 つの不等式を全て同時に満たすことはない:

$$\theta-\frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2},\ \theta-\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2},\ \frac{c}{d}-\theta \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}.$$

2. $\theta < \frac{a+c}{b+d}$ の場合

同様に以下 3 つの不等式を同時に満たすことはない:

$$\theta-\frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2},\ \frac{a+c}{b+d}-\theta \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2},\ \frac{c}{d}-\theta \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}.$$

したがって不等式 (3) の解 h/k は a/b, c/d, $(a+c)/(b+d)$ のいずれかである. 次に (3) の解 h/k は無限個存在することを示す.Lemma1 より

$$\left|\theta-\frac{h}{k}\right| < \left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}\right|+\left|\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{d(n+1)}+\frac{1}{b(n+1)} \leq \frac{2}{n+1}.$$

いま h_1/k_1 を (3) を満たす解と仮定すると $\left|\theta-\frac{h_1}{k_1}\right| \geq 0$ は明らか. $n > \frac{2}{|\theta-h_1/k_1|}$ を満たすような n を考えると

$$\left|\theta-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{2}{n+1} < \left|\theta-\frac{h_1}{k_1}\right|.$$

同様にして $h_2/k_2, h_3/k_3, \cdots$ を考えると無限個の解が得られる. 最後に (3) の $\sqrt{5}$ を $\beta > \sqrt{5}$ を満たす定数で置き換えることができないことを示そう.

$$(x-\theta_0)(x-\theta_1) = x^2-x-1$$

を満たす θ_0 , θ_1 を

$$\theta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \theta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とおく.$\forall h, k \in \mathbb{Z}(k>0)$ に対し以下は明らかである:

$$\left|\frac{h}{k}-\theta_0\right| \cdot \left|\frac{h}{k}-\theta_1\right| = \left|\left(\frac{h}{k}\right)^2-\frac{h}{k}-1\right| \neq 0.$$

また $\theta_1 = \theta_0-\sqrt{5}$ より

$$\left|\frac{h}{k}-\theta_0\right| \cdot \left|\frac{h}{k}-\theta_0+\sqrt{5}\right| = \frac{|h^2-hk-k^2|}{k^2} \geq \frac{1}{k^2}.$$

三角不等式より

$$\frac{1}{k^2} \leq \left|\frac{h}{k}-\theta_0\right|\left\{\left|\frac{h}{k}-\theta_0\right|+\sqrt{5}\right\}. \tag{4}$$

さて任意の正の数 β に対して

$$\left|\frac{h_j}{k_j}-\theta_0\right| < \frac{1}{\beta {k_j}^2} \tag{5}$$

を満たす無限個の $\frac{h_j}{k_j}$ $(j=1,2,3,\cdots)$ が存在したとする.(4) から

$$\frac{1}{{k_j}^2} \leq \left|\frac{h_j}{k_j}-\theta_0\right|\left\{\left|\frac{h_j}{k_j}-\theta_0\right|+\sqrt{5}\right\} < \frac{1}{\beta {k_j}^2}\left(\frac{1}{\beta {k_j}^2}+\sqrt{5}\right)$$

より

$$\beta < \frac{1}{\beta {k_j}^2}+\sqrt{5}$$

となり

$$\beta \leq \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{\beta {k_j}^2}+\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}.$$

したがって $\sqrt{5}$ は (3) を満たす最大の定数となる. □

References

[1] I. Niven, *Diophantine Approximations*, Dover, 1963, reprinted, 2008.

[2] I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Willey, 5th edition, 1991.

[3] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2011.

[4] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Volume I, Divisibility and primality, Chelsea, 1966, reprinted, Dover, 2005.