P-6

T^n と $L(p,q)$ の基本群
fundamental group of T^n and $L(p,q)$

○鳥山富巳佳 [1], 松元重則 [2]
*Fumika Toriyama[1], Shigenori Matsumoto[2]

Abstract: In topology, topological invariants play fundamental roles. One of them is the fundamental group.In this talk, we state some basic properties of the fundamental groups and present computations for the n-torus T^n and the 3-dimensional Lense space $L(p,q)$.

1. 基本群

X:位相空間, $x_0 \in X$:基準点

定義 1
x_0 におけるループとは以下を満たす連続写像 ℓ のことであり, その集合を Ω とする.
$\Omega(X,x_0)=\{\ell:[0,1]\longrightarrow x,\ \text{連続写像},\ \ell(0)=\ell(1)=x_0\}$

定義 2
$F:\ell_0\approx\ell_1$ がホモトピーとは $\exists F:[0,1]_{\ni t}\times[0,1]_{\ni s}\longrightarrow X$ が連続写像で以下を満たすこと.
(1)$F(0,s)=F(1,s)=x_0$ $(\forall s)$
(2)$F(t,0)=\ell_0(t)$, $F(t,1)=\ell_1(t)$

定義 3
$\Omega(X,x_0)$ にてホモトピックとは ℓ に同値関係を入れたものであり, その同値類 $[\ell]$ の集合を π_1 とする.
$\pi_1(X,x_0)=\{[\ell]\mid \ell\in\Omega(X,x_0)\}$

命題 1
$\ell_0\approx\ell_1,\ \ell_0'\approx\ell_1' \implies \ell_0\cdot\ell_0'\approx\ell_1\cdot\ell_1'$

命題 2
命題 *1* より $[\ell][\ell']=[\ell\cdot\ell']$ が定義でき $[\ell_0]=[\ell_1],\ [\ell_0']=[\ell_1'] \implies [\ell_0\cdot\ell_0']=[\ell_1\cdot\ell_1']$

(証明)
$H_1:\ell_0\simeq\ell_1$, $H_2:\ell_0'\simeq\ell_1'$ が与えられたとき F を次のように決める.

$$F(t,s)=\begin{cases}H_1(2t,s) & 0\le t\le\frac12\\ H_2(2t-1,s) & \frac12\le t\le 1\end{cases}$$

このとき $H_1(1,s)=x_0=H_2(0,s)$ より F は連続.

$$F(t,0)=\begin{cases}H_1(2t,0)=\ell_0(2t) & 0\le t\le\frac12\\ H_2(2t-1,0)=\ell_0'(2t-1) & \frac12\le t\le 1\end{cases}$$

従って $F(t,0)=(\ell_0\cdot\ell_0')(t)$ である. 同様に $F(t,1)=\ell_1\cdot\ell_1'(t)$ が得られ, このとき $F(0,s)=H_1(0,s)=x_0$, $F(1,s)=H_2(1,s)=x_0$ より $[\ell_0\cdot\ell_0']=[\ell_1\cdot\ell_1']$

□

命題 3
命題 *2* より $\pi_1(X,x_0)$ は群になる.

(証明)
(1) $([\ell][\ell'])[\ell'']=[\ell]([\ell'][\ell''])$
$F:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ を次のように決める.

$$F(t,s)=\begin{cases}\ell_1(\frac{4}{s+1}t) & 0\le t\le\frac{s+1}{4}\\ \ell_2(4t-(s+1)) & \frac{s+1}{4}\le t\le\frac{s+2}{4}\\ \ell_3(\frac{4t}{2-s}-\frac{s+2}{2-s}) & \frac{s+2}{4}\le t\le 1\end{cases}$$

このとき F は連続で $(\ell\cdot\ell')\ell''\simeq\ell(\ell'\cdot\ell'')$
(2) $\ell_0(t)=x_0$ とおくと $\forall[\ell]$ に対し $[\ell_0][\ell]=[\ell][\ell_0]=[\ell]$ を満たす.
実際, F_1 と F_2 を次のように決める.

$$F_1(t,s)=\begin{cases}x_0 & 0\le t\le\frac{s}{2}\\ \ell(\frac{t-1}{1-\frac{s}{2}}+1) & \frac{s}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$F_2(t,s)=\begin{cases}\ell(\frac{t}{1-\frac{s}{2}}) & 0\le t\le\frac{s}{2}\\ x_0 & \frac{s}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

F_1 より $\ell_0\cdot\ell\simeq\ell$, F_2 より $\ell\cdot\ell_0\simeq\ell$
(3)$\ell'(t)=\ell(1-t)$ とおくと $\forall[\ell]$ に対し ℓ の逆元 ℓ' で $[\ell][\ell']=[\ell'][\ell]=[\ell_0]$ を満たすものがある.
F_1 と F_2 を次のように決める.

$$F_1(t,s)=\begin{cases}x_0 & 0\le t\le\frac{s}{2}\\ \ell(2t-s) & \frac{s}{2}\le t\le\frac12\\ \ell(2(1-t)-s) & \frac12\le t\le\frac{1-s}{2}\\ x_0 & \frac{1-s}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$F_2(t,s)=\begin{cases}x_0 & 0\le t\le\frac{s}{2}\\ \ell(-2t+1+s) & \frac{s}{2}\le t\le\frac12\\ \ell(2t-1+s) & \frac12\le t\le\frac{1-s}{2}\\ x_0 & \frac{1-s}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

このとき F_1 , F_2 は連続で $\ell\cdot\ell'\simeq\ell_0$, $\ell'\cdot\ell\simeq\ell_0$ □

この群を X の x_0 を基点とする基本群と言う.

1: 日大理工・院 (前)・数学　2: 日大理工・教員・数学

2. $\mathbb{R}^n, S^n, T^n$ の基本群

$\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間 , S^n を n 次元球面とするとき, 次が知られている.

定理 1
$\pi_1(\mathbb{R}^n, *) \cong \{e\}$, $n \geq 1$
$\pi_1(S^n, *) \cong \{e\}$, $n \geq 2$

• $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $* = [0]$, $\tau : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ とする.

定理 2
$\pi_1(T^n, *) \cong \mathbb{Z}^n$

(証明)
$\forall \ell \in \Omega(T^n, *)$ に対し , ℓ の lift とは以下を満たす $\tilde{\ell}$ のこと.
$\tilde{\ell} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ で $\tau \circ \tilde{\ell} = \ell$
$deg(\ell) = \tilde{\ell}(1) - \tilde{\ell}(0)$ は $\tilde{\ell}$ に依らず一定.
よって写像 $deg : \Omega(T^n, *) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ が定まる.
このとき以下が成り立つ.
(1)$\ell \approx \ell' \Longleftrightarrow deg(\ell) = deg(\ell')$
($\Longrightarrow$)
$F(t,s) = \ell_s(t)$, $\tilde{\ell}_s : \tilde{\ell}_s(0) = (0, \cdots, 0)$ とする.
このとき $\tilde{\ell}_s(1)$ は $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ であり s について連続かつ常に整数.
従って $deg(\ell_s) = \tilde{\ell}_s(1) - \tilde{\ell}_s(0)$ は s に依らず一定.
($\Longleftarrow$)
$deg(\ell) = deg(\ell') = (m_1, \cdots, m_n)$ とすると $\tilde{\ell}(0) = \tilde{\ell}'(0) = (0, \cdots, 0)$, $\tilde{\ell}(1) = \tilde{\ell}'(1) = (m_1, \cdots, m_n)$
$\tilde{\ell}_s(t) = (1-s)\tilde{\ell}(t) + s\tilde{\ell}'(t)$ とおくと $\tilde{\ell}_s(0) = (0, \cdots, 0)$, $\tilde{\ell}_s(1) = (m_1, \cdots, m_n)$
従って $\ell_s = p \circ \tilde{\ell}_s$ とおくと $\ell \approx \ell'$
以上より (1) が成り立つので $deg : \pi_1(T^n, [0]) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ と定められる.
このとき以下が成り立つ.
(2)$deg(\ell \cdot \ell') = deg(\ell) + deg(\ell')$
$deg(\ell) = (m_1, \cdots, m_n)$ とおくと lift $\tilde{\ell}$ で $\tilde{\ell}(0) = (0, \cdots, 0)$, $\tilde{\ell}(1) = (m_1, \cdots, m)$ を満たすものがある.
$deg(\ell') = (m'_1, \cdots, m'_n)$ とおくと lift $\tilde{\ell}'$ で $\tilde{\ell}'(0) = (m_1, \cdots, m_n)$, $\tilde{\ell}'(1) = (m_1 + m'_1, \cdots, m_n + m'_n)$
ここで $\tilde{\ell}(1) = \tilde{\ell}'(0)$ なので $\tilde{\ell} \cdot \tilde{\ell}'$ が定まり $\tilde{\ell} \cdot \tilde{\ell}'(0) = (0, \cdots, 0)$, $\tilde{\ell} \cdot \tilde{\ell}'(1) = (m_1 + m'_1, \cdots, m_n + m'_n)$
従って $deg(\ell \cdot \ell') = (m_1 + m'_1, \cdots, m_n + m'_n) - (0, \cdots, 0) = (m_1, \cdots, m_n) + (m'_1, \cdots, m'_n) = deg(\ell) + deg(\ell')$
(3) 全射
与えられた $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し $\tilde{\ell} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ で $\tilde{\ell}(0) = (0, \cdots, 0)$, $\tilde{\ell}(1) = (m_1, \cdots, m_n)$ を満たすものがある.
例えば $\tilde{\ell}(t) = t(m_1, \cdots, m_n)$
そこで $\ell = \tau \circ \tilde{\ell}$ とおけば $deg(\ell) = (m_1, \cdots, m_n)$ である.
よって全射.
(4) 単射
$deg(\ell) = deg(\ell') \implies \ell \approx \ell'$ より
$deg([\ell]) = deg([\ell']) \implies [\ell] = [\ell']$ □

3. $L(p,q)$ の基本群

$p, q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$, $1 < p$, $1 \leq q \leq p-1$ とする.
群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\sigma^k \mid 0 \leq k \leq p-1\}$ の $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid\mid z \mid^2 + \mid w \mid^2 = 1\}$ への作用を次にて定める.
$\sigma^k(z,w) = (e^{\frac{2\pi\imath k}{p}} z, e^{\frac{2\pi\imath kq}{p}} w)$
これは自由であり, 商空間は 3-多様体になる.
これを $(p,q) Lense\ space$ といい $L(p,q)$ で表す.

定理 3
$\pi_1(L(p,q), *) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

(証明)
$\mathbb{S}^3 \ni (1,0)$ に対して $* = [(1,0)]$, $\tau : \mathbb{S}^3 \longrightarrow L(p,q)$ とする.
$\ell \in \Omega(L(p,q), *)$ に対し $\tilde{\ell} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^3$ は $\tau \circ \tilde{\ell} = \ell$, $\tilde{\ell}(0) = (1,0)$, $\tilde{\ell}(1) = \sigma^k(1,0)$ を満たすものがとれる.
$deg([\ell]) = k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおくと $deg : \pi_1(L(p,q), *) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が定まる.
このとき以下が成り立つ.
(1)$deg(\ell \cdot \ell') = deg(\ell) + deg(\ell')$
$deg(\ell') = m$ とおくと $\tilde{\ell}'(0) = \sigma^k(1,0)$, $\tilde{\ell}'(1) = \sigma^{k+m}(1,0)$ を満たす ℓ' の lift が存在する.
このとき $\tilde{\ell} \cdot \tilde{\ell}'$ は連続で $\tilde{\ell} \cdot \tilde{\ell}'(0) = (1,0)$, $\tilde{\ell} \cdot \tilde{\ell}'(1) = \sigma^{k+m}(1,0)$
従って $deg(\ell \cdot \ell') = \sigma^{k+m}(1,0) - (1,0) = k + m = deg(\ell) + deg(\ell')$
(2) 単射
$deg([\ell]) = deg[\ell'] = k$ とする.
ℓ の lift $\tilde{\ell}$ と ℓ' の lift $\tilde{\ell}'$ で $\tilde{\ell}(0) = \tilde{\ell}'(0) = (1,0)$, $\tilde{\ell}(1) = \tilde{\ell}'(1) = \sigma^k(1,0)$ を満たすものがある.
また $\tilde{\ell}_s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^3$, $0 \leq s \leq 1$ で $\tilde{\ell}_0 = \tilde{\ell}$, $\tilde{\ell}_1 = \tilde{\ell}'$ を満たすものがとれる. ($\pi_1(\mathbb{S}^3, *) = \{e\}$ より)
(3) 全射
$\tilde{\ell} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^3$ で $\tilde{\ell}(0) = (1,0)$, $\tilde{\ell}(1) = \sigma^k(1,0)$ を満たすものがある.
そこで $\ell = \tau \circ \tilde{\ell}$ とおけば $deg([\ell]) = k$ である. □

4. 参考文献

[1] 一樂重雄: 位相幾何学: 朝倉書店

[2] 小林一章: 曲面と結び目のトポロジー: 朝倉書店