P-7

正規直交基を用いた E8 Lattice の表記法について

A description of E_8 lattice in term of an orthogonal basis

○花井紀任[1]，　佐々木隆二[2]
*Toshitaka Hanai[1],　Ryuji Sasaki[2]

Abstract::In this report, we describe structures of the E8 lattice Γ, and its sublattices Φ, Ψ which are inverse images of two maximal totally singular subspaces $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$ with $\Gamma/2\Gamma = \bar{\Phi} \oplus \bar{\Psi}$, by using a specific orthogonal basis contained in Γ.

定義１
$\mathbb{R}^8$の内積を

$$x,\ y \in \mathbb{R}^8,\ x \cdot y = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i$$

と定める．$\Gamma \subset \mathbb{R}^8$ に対し，$\Gamma = \left\{\sum a_i x_i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z}\right\}$となるような線形独立な$x_1$，…，$x_8$が存在するとき格子群(lattice)という．$x \in \Gamma$に対し$\left|\left|x\right|\right|^2 = x \cdot x \in 2\mathbb{Z}$となるとき$\Gamma$を even といい，$\Gamma$の$\mathbb{Z}$基底$x_1$，…，$x_8$に対し，$|\det(x_i \cdot x_j)| = 1$ となるとき，Γを unimodular という．Even unimodular lattice Γ を E_8lattice という．Γを E_8lattice とし，Γ_n，$\bar{\Gamma}$を以下のように定める．

$$\Gamma_n := \left\{x \in \Gamma \,\middle|\, x \cdot x = n\right\},\ \bar{\Gamma} := \Gamma/2\Gamma$$

定理１
(1)$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma_0} \cup \bar{\Gamma_2} \cup \bar{\Gamma_4}$
(2)Γ_2に含まれる同値類は$\{\pm x\}$
(3)Γ_4に含まれる同値類は互いに直交する 8 個のベクトルとその-1倍からなる.

(証明)x，$y \in \Gamma$は$\left|\left|x\right|\right|^2$，$\left|\left|y\right|\right|^2 \leqq 4$，$x \neq \pm y$，$\bar{x} = \bar{y}$，$x \cdot y \geqq 0$ を満たすとする．このとき，$x-y \in 2\Gamma$ より

$$8 \leqq ||x-y||^2 \leqq \left|\left|x\right|\right|^2 + \left|\left|y\right|\right|^2 + 2x \cdot y \leqq 8$$
$$\therefore \left|\left|x\right|\right|^2 = \left|\left|y\right|\right|^2 = 4,\ x \cdot y = 0\ .$$

これにより(1)の互いに素であること，(2)，及び(3)のΓ_4の同値類が互いに直交することがわかる．Γが even unimodular なので Hecke の定理より，

$$\theta_\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma_n| e^{\pi i n z}$$

は，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$に関する重さが 4 のモジュラー形式である．これは，定数倍を用いて一意的に定まるので，Eisenstein 級数に一致する．

$$\theta_\Gamma(z) = 1 + 240 \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{d|k} d^3) e^{2\pi i k z}$$

特に,

$$|\Gamma_2| = 240\ ,\ |\Gamma_4| = 240(1^3 + 2^3)$$

従って

$$2^8 = |\bar{\Gamma}| \geqq |\bar{\Gamma_0}| + |\bar{\Gamma_2}| + |\bar{\Gamma_4}|$$
$$\geqq 1 + 240 + {}^{240\ \cdot 9}\!/_{16} = 2^8$$

∴(1)，(3)をえる．▮

Γ_4に含まれる長さ 4 のベクトルの剰余類に含まれる計 8 つのベクトルを Γ-coordinate frame と呼び，v_iで表す.

命題１
Ω={1，⋯，8}とし，$\{v_i\}_{i\in\Omega}$を一組の Γ-coordinate frame とする．$i \in \Omega$に対し，$e_i = \frac{1}{2} v_i$，$S \subset \Omega$に対し，$e_S = \sum_{i\in S} e_i$
とする．必要ならe_iの１つの符号を変えると

$$\Gamma = < e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2} e_\Omega | i,\ j \in \Omega >$$

(証明) $\{e_i\}_{i\in\Omega}$は$\mathbb{R}^8$の正規直交系である.

$$D = < e_i \pm e_j | i,\ j \in \Omega >$$

は root lattice D_8に同型である.

$$v_i - v_j = 2e_i - 2e_j = 2(e_i - e_j) \in 2\Gamma$$
$$\therefore e_i - e_j \in \Gamma$$

また$v_i = 2e_i \in \Gamma$なので $D_8 \subset \Gamma$.
一方，$\Gamma \cdot \Gamma \subset \mathbb{Z}$なので各 i に対し,

$$\Gamma \subset \left\{x \in \mathbb{R}^8 \,\middle|\, x \cdot D \subset \mathbb{Z}\right\} = D + < e_i,\ \frac{1}{2} e_\Omega >$$

Γ : unimodular より，$\Gamma \neq D$．Γ : even より，$e_i \notin \Gamma$.

$$\therefore \Gamma = D + \mathbb{Z}\tfrac{1}{2} e_\Omega \text{ または } \Gamma = D + \mathbb{Z}\left(-e_i + \tfrac{1}{2} e_\Omega\right)$$

$\Gamma = D + \mathbb{Z}\left(-e_i + \frac{1}{2} e_\Omega\right)$のとき$e_i$を$-e_i$とすれば

$\Gamma = D + \mathbb{Z}\frac{1}{2} e_\Omega$とかけるので,

1：日大理工・院(前)・数学 2：日大理工・教員・数学

$\Gamma = < e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}e_\Omega | i,\ j \in \Omega >$をえる．▮

定義 2

$\mathrm{q}: \Gamma \to \mathbb{Z}$，$\mathrm{q}: x \mapsto \frac{1}{2}\left||x|\right|^2$とし，$\bar{q}(\bar{x}) = \overline{q(x)}$で$\mathbb{F}_2$空間$\bar{\Gamma}$上の二次形式を定義する．$\bar{\Gamma}$の部分空間$T$に対し，$\bar{q}(T) := \{\bar{q}(\bar{x}) | \bar{x} \in T\} = 0$ となるときTを totally singular といい，$2\mathrm{dimT} = \mathrm{dim}\bar{\Gamma}$のとき，maximal という．

すると$\bar{\Gamma} = \bar{\Phi} \oplus \bar{\Psi}$，$\bar{\Phi}$及び$\bar{\Psi}$はmaximal totally singularと表される．

ここで，Γの sublattice Φ，Ψ を次のように定める．

$$f: \Gamma \to \bar{\Gamma}に対し，f^{-1}(\bar{\Phi}) = \Phi,\ f^{-1}(\bar{\Psi}) = \Psi.$$

このとき，$\Phi \cap \Psi = 2\Gamma$，$\left||x|\right|^2 \in 4\mathbb{Z}$，$\forall x \in \Phi \cup \Psi$.

$I = < e_i | i \in \Omega >$とし，写像 ^ を以下のように定める．

$$\hat{}: I \to 2^\Omega,\ \hat{}: \sum_{i \in \Omega} x_i e_i \mapsto \{i \in \Omega | x_i \in 2\mathbb{Z} + 1\}$$

また$\hat{D} = E(\Omega) = \{S \subset \Omega |\ |S| \in 2\mathbb{Z}\}$とする．

$q_E: S \mapsto \frac{1}{2}|S| + 2\mathbb{Z}$とおけば，これは$< \Omega >$ を核とする$E(\Omega)$に関する二次形式となる．

命題 2

次を満たす$\mathbb{R}^8$の正規直交基底 $\{e_i | i \in \Omega\}$ を選ぶことが出来る．

$$\Gamma = < e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}e_\Omega | i,\ j \in \Omega >$$

$$\Phi = < e_S,\ 2e_i | S \in \mathcal{C}_1,\ i \in \Omega >$$

$$\Psi = < e_T,\ -2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega | T \in \mathcal{C}_2,\ i \in \Omega >$$

$\mathcal{C}_1 = \hat{\Phi}$，$\mathcal{C}_2 = (\Psi \cap I)\hat{}$，$\mathcal{C}_1/< \Omega >$，$\mathcal{C}_2/< \Omega >$は*E(Ω)/<Ω>*の complementary maximal totally singular.

(証明) $2e_i = v_i \in \Gamma$より$2e_i \in \Phi$ 又は $2e_i \in \Psi$.

$2e_i \in \Phi$としてよい．このとき，$2I \subset \Phi$．Φは$\sqrt{2}\Gamma$と同長なので$\Phi \cdot \Phi \subset 2\mathbb{Z}$．$2e_i \cdot \frac{1}{2}e_\Omega = 1 \notin 2\mathbb{Z}$より$\frac{1}{2}e_\Omega \notin \Phi$.

$$\therefore \Phi \subset I.$$

$$\therefore 2I \subset \Phi \subset I.$$

もし$S \in \mathcal{C}_1 = \hat{\Phi}$とすれば$e_S \in \Phi$なので$|S| = \left||e_S|\right|^2 \in 4\mathbb{Z}$.

$$|\Phi: 2I| = |\Phi: 2\Gamma| = 2^4,\ |E(\Omega)| = 2^7 より$$

$$\therefore \mathcal{C}_1/< \Omega > はmaximal totally singular.$$

$\frac{1}{2}e_\Omega \notin I$より$\Phi + \Psi = \Gamma \not\subset I$.

従って$\exists x \in \Psi - I\ s.t. ||x||^2 = 4$.

このとき x の成分は 1 つは$\pm\frac{3}{2}$で他は$\pm\frac{1}{2}$である．e_iの符号を偶数個変えることはΓやΦの表記には影響を与えない．このとき，$\frac{1}{2}e_\Omega$，$2e_i \in \Gamma$，$2\Gamma \subset \Psi$より，$-2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega \in \Psi$．また，$2D \subset 2\Gamma \subset \Psi$より，任意の$i$に対し，$-2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega \in \Psi$をえる．

$\mathcal{C}_2 = (\Psi \cap I)\hat{}$とする．このとき$2I = 2D + 2\mathbb{Z}e_i$から，各固定された$i$に対して$e_T$ 又は$e_T + 2e_i$によって$T \in \mathcal{C}_2$は代表される．

$\therefore |T| = ||e_T||^2 = ||e_T + 2e_i||^2 \in 4\mathbb{Z}$.

しかし，$\Psi \cdot \left(-2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega\right) \subset 2\mathbb{Z}$であり，また一方で

$$e_T \cdot \left(-2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega\right) \equiv 0\ (\mathrm{mod}2)$$

$$(e_T + 2e_i) \cdot \left(-2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega\right) \equiv 1\ (\mathrm{mod}2)$$

なので$e_T \in \Psi$をえる．$e_\Omega \in 2\Gamma \subset \Psi$より$\Omega \in \mathcal{C}_2$.

$\therefore < e_T,\ -2e_i + \frac{1}{2}e_\Omega | T \in \mathcal{C}_2,\ i \in \Omega > \subset \Psi$.

$2e_i + 2e_j = \left(2e_i - \frac{1}{2}e_\Omega\right) + \left(2e_j - \frac{1}{2}e_\Omega\right) + e_\Omega$

なので$2D = \Psi \cap 2I$とΨのすべてを生成した．

$|\mathcal{C}_2| = |\Psi \cap I / \Psi \cap 2I| = |\Psi/2D| / |\Psi/\Psi \cap I| = 2^4$

$$\therefore \mathcal{C}_2/< \Omega > はmaximal totally singular.$$

$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = \hat{\Phi} + (\Psi \cap I)\hat{} = (\Phi + (\Psi \cap I))\hat{} = \hat{D} = E(\Omega)$

$\therefore \mathcal{C}_1/< \Omega >$，$\mathcal{C}_2/< \Omega >$は *E(Ω)/<Ω>*の complementary maximal totally singular. ▮

参考文献

[1] James Lepowsky, Arne Meurman :「An E8-Approach to the Leech Lattice and Conway Group」, Journal of Algebra 77, p484-504, 1982

[2] 鈴木　通夫 :「有限単純群」, 紀伊国屋, 1987.

[3] Wolfgang Ebeling :「Lattices and Codes」, Lattices and Codes: A Course Partially Based on Lectures by Friedrich Hirzebruch ,Springer Spektrum, p1-32, 2012